

## 2012 今週の工学の基礎 第14回特別編

丸山大介\*

2012年6月14日

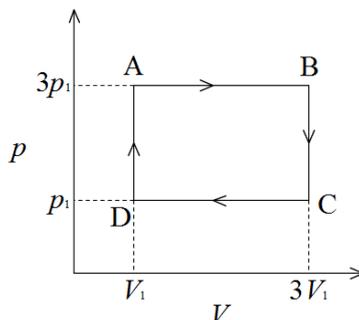
【No.1】  $a$  を任意の実数とするとき、定積分

$$\int_{-\pi}^{\pi} (x + a \sin x)^2 dx$$

の最小値はいくらか。(H.24 労基 B)

1.  $\frac{2}{3}\pi^3$     2.  $\frac{2}{3}\pi^3 - \pi$     3.  $\frac{2}{3}\pi^3 - 2\pi$     4.  $\frac{2}{3}\pi^3 - 3\pi$     5.  $\frac{2}{3}\pi^3 - 4\pi$

【No.2】 滑らかなピストンの付いたシリンダー中に、一定量の理想気体を封じ込め、図のようにその圧力  $p$  と体積  $V$  を  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$  の順に変化させた。A, B, C, D の状態のときの温度をそれぞれ  $T_A, T_B, T_C, T_D$  とする。これらの温度の関係として最も妥当なのはどれか。(H.24 労基 B)



1.  $T_A = T_B < T_C < T_D$   
2.  $T_A < T_B < T_C < T_D$   
3.  $T_D < T_A < T_C < T_B$   
4.  $T_D < T_A < T_C < T_B$   
5.  $T_D < T_C < T_A < T_B$

\* ©MARUYAMA Daisuke 2012 <http://www.maru-will.com/>

【解答 1】 正解 5 難易度 B

展開すると、

$$\int_{-\pi}^{\pi} (x + a \sin x)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx + 2a \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx + a^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx$$

ここで、まず、

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3}$$

であり、次に部分積分を使って、

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx = [-x \cos x]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = 2\pi$$

となり、最後に第 3 項は半角公式を使って、

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \left[ \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

であるので、与えられた式は、

$$f(a) = \pi a + 4\pi a + \frac{2\pi^3}{3}$$

となる。これを平方完成して、

$$f(a) = \pi(a+2)^2 + \frac{2}{3}\pi^3 - 4\pi$$

したがって、求める最小値は、

$$f(-1) = \frac{2}{3}\pi^3 - 4\pi$$

となる。

ポイント

いわゆる変分法に近い問題で、展開して積分を実行するだけですが、経験がないと難しかったかもしれません。積分は  $x$  について行うため、 $a$  は積分中はただの無関係な数字と同じ扱いをすることに注意が必要です。ただ、この問題では、計算が必要となる積分が、三角関数の 2 乗だったり、部分積分だったり、近年の公務員試験で出てきたタイプのものが勢揃いした形になっています。その意味で、この問題の積分計算自体は練習用として非常によい問題だと思います。

【解答 2】 正解 3 難易度 A

状態方程式から、 $pV$  の大小関係と温度の大小関係は一致する。したがって、

$$T_D < T_A = T_C < T_B$$

ポイント

$PV$  線図の基本中の基本の問題で、絶対に落とせません。すっぱり熱力学を落としてしまわないように。