第2章

図形，ベクトル

この章では，図形，ベクトルに関する基本公式をまとめています。したがって，前章に引き続き，まだまだ数学の基本公式の計算準備という意味合いの強い章になっています。

前半には初等幾何の問題をそろえています。初等幾何の問題は，昔も出ていたことは出ていたのですが，近年，特に国家一般職，総合職で毎年見られるようになりました。正直，このタイプの問題は問題別に対処するしかなく，「すべての問題に対応する万能の解法」というのはありません。一方で，教養試験でも出題されており，そちらの方が問題の幅も多様であることを考えれば，基本は教養対策として対策すべきではないかと思います。ですので，ここでは「出題の見本」という意味合いが強いと思われます。

一方で，ベクトルは工学の基礎のみの出題となります。地方上級の出題率も高く，難易度も様々です。内積，外積に関する問題の出題もあります。そのため，基本公式をしっかり覚えていく必要があります。総合職でも応用問題が考えられますので，講義で扱う意義も大きいかと思います。

【例題 2-1】(H.20 国家 II 種)

角の二等分線の定理，内心に関する問題です。ほぼ教養の問題と言ってよいでしょう。ここでは出題例の1つとして掲載しています。

【例題 2-2】(H.19 国家 II 種)

今度は，立体の幾何の問題の出題例です。こちらも教養では頻出の問題と言えますが，教養では円同士が接する問題の方が出題が多いようです。

【例題 2-3】(H.23 国家 I 種)

同じく初等幾何の問題です。この問題では球の切断面を題材としていますが，この円については，空間座標が出題された時代には，国家 II 種，地方上級で何度も出題があります。その意味で知っておいてもよい問題としてここに選んでおきました。

【例題 2-4】(H.20 国家 I 種)

平面座標の問題で，様々な解法が考えられる良問だと考えています。やや難しい問題ですが，ここに掲載しておきました。

考えるポイントは2つあります。1つは求める $\tan$ をどう考えるのか。解法1では図形的に捉え，解法2では直線の傾きとして捉えています。前者なら P, Q の座標を，後者なら接線の式を求めるという方針になります。もう1つは楕円をどう扱うかです。具体的には円に直すのか直さないのかです。実は，国家 I 種（総合職）では，H.16 にも楕円の問題が出題されていて，このときには円に直す手法が有効でした。ですので，すぐに円に直してしまってもよいでしょう。

解法1では副産物として，なぜ $\tan$ の積が定数になるのか，その本質を垣間見ることができます。一方で，P の座標を $(\cos \theta, 2 \sin \theta)$ とおくミスには注意が必要です。

$(\cos \psi, 2 \sin \psi)$ とおくことはできますが, ψ は偏角を表しません。解法 2 では, 傾きを式から直接微分しています。この微分については頻出ですので, できるようにしておく必要がありますが, これについて微分の項目で扱います。

解法 2 の欄外に, 楕円の接線の公式が書かれています。この公式を指摘することは簡単ですが, あまり使われない公式ですので (円を含めて), これを覚えて, これを使って解きなさい, というのは少々酷な気がします。むしろ「高校時代に覚えているなら思い出しでもいい」という程度の扱いがバランスとしてよいような気がします。

【例題 2-5】(H.21 国家 I 種)

線形計画法の典型問題をここで掲載しました。他に適切な場所もないので, ということです。

線形計画法の問題はどの職種でも出題されるどころか, 教養でも, また, 専門でも出題が見られます。特に国家総合職で, 不等式のみをつかったそっけない出題がみられるのが特徴で, 普通は何らかの設定のもとに立式させるものが多く見られます。逆に言えば, 立式の手間がいらず, 線形計画法の計算法のみを学習できるため, この問題を選びました。この問題は, 領域も他の国家総合職の問題と比べて素直な出題になっています。

類題は, 練習問題に掲載したもの以外に, H.23 国家 I 種, H.26 国家総合職が挙げられますが, 専門や教養まで含めれば多数あります。

【例題 2-6】(H.24 地方上級)

ベクトルの内積から角度を求める典型問題を紹介しました。地方上級の 1 問目には, ベクトルや線形代数が出題されることがほとんどです。空間ベクトルは苦手になっている人も多いようで, この問題も, 実際には正答率が低かったようです。空間では, 角度を求める手法として内積をまず考える, ということをも身につけてもらうことが狙いです。

【例題 2-7】(H.19 労基 B)

近年やや出題数の見られる問題ということで取り上げました。そのことと, 使われるものが「内分点の公式」ということで重要度を A としましたが, 他の問題と比べるとやや重要度は低く, B にしてもよかったかもしれません。この手の問題は教養にも出題があるのですが, なんと言っても, 最後の公式があることが大きいと言えます。これを知っていれば, 全く計算なしにいきなり答えが出てきます。練習問題に取り上げたもの以外にも, 国家総合職で出題がありますが, この点は変わりませんでした。

頻度はともかく, 公式知識の有無だけで, 難易度が大きく変わるため, 受験テクニックの大きききいてくる問題としての重要度は高いと言えるかもしれません。出てきたときに確実な差になりますので。

【No. 1】(H.24 国家一般職)

平面図形の出題例としてここに用意しました。図形の問題ですので, まずは図を描いてもらいたいと考えています。題材は底辺分割による面積比の計算で, 教養では頻出です。ただ, やはりこのあたりの問題は教養の方が出題のバリエーションも多いですね。

【No. 2】(H.21 国家 II 種)

これも平面図形の問題で, 多くの場合三角関数の公式を使うのがいいのではないかと思います。

【No. 3】(H.26 国家一般職)

さらに平面図形の出題例ですが, 今までの問題と比べると, 難易度が上がっています。

解答の補助線が自然に思えますが、そのほかに、ACに垂直な半径を伸ばして相似を利用したり、三角比を使ったりと色々な方法が考えられます。

【No. 4】(H.21 地方上級)

ここからは空間図形の問題です。やはり教養に類題が多くありますので、出題例と考えてもらうといいのですが、ここでは地方上級の出題例にもなっています。地方上級では一時期初等幾何が出題されましたが、最近の出題例は少なくなっています。

【No. 5】(H.23 国家II種)

これも空間図形の出題例として取り上げましたが、他の問題よりややレベルが高く、しかも誘導形式となっています。ほぼ読解力の問題になっていますね。

【No. 6】(H.21 国家I種)

なぜか放物線と接線の問題は、国家総合職でちらほらと見かけます。微分で掲載してもよかったのですが、判別式なども使えることと、 $\tan$ と傾きの関係を主題としたことからここで扱いました。解法2の $\tan \phi = k$ の部分が、「傾きが $\tan$ になる」という部分ですね。

【No. 7】(H.9 国家II種)

線形計画法の応用問題で、こちらは立式も必要になります。過去の地方上級や専門、あるいは教養ではこのような形での出題が多いのですが、なぜか国家I種だけは不等式をそのまま出題します。なお、原題では、方眼紙が問題文の下に印刷されていました。

【No. 8】(H.25 労基B)

例題2-6の練習問題です。もちろん内積が狙いです。

【No. 9】(H.17 国家I種)

内積、外積の図形的な意味をテーマにした問題で、易しくはないのですが、考えてもらう問題として掲載しました。垂線の長さを、三角形の高さで考えるのか、直角三角形の長さの比で考えるのかによって方針が分かれそうですが、いずれにしても、まずは明確に方針を決めた方がよさそうです。外積の出題は多くありませんが、H.24の地方上級にも、外積は出題されています。

【No. 10】(H.10 労基B)

空間図形における外積の応用例として選びました。このような問題では、外積を知っているか知らないかで差がつきそうです。ただ、空間座標の出題が減少している近年では、重要度は必ずしも高くありません。

【No. 11】(H.18 国家II種)

例題2-7の応用問題で、解答では例題2-7の後半の公式の結果をそのまま使っています。この公式の利用の一例と考えてもらってもかまいません。