

第 4 章

国家 I 種 平成 14 年 No.8 工学の基礎

4.1 問題：確率

問題

ある人の通話時間 x 分は平均が 5 分となる指数分布に従うとする。いまその人が電話をし始めてから 5 分経過したとき、その後 5 分以内に話し終わる確率はいくらか。

なお、平均が λ 分の指数分布の確率密度関数は、

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

である。

1. e^{-1} 2. $\frac{1}{1+e^{-1}}$ 3. $e^{-1} - e^{-2}$ 4. $1 - e^{-1}$ 5. $1 - e^{-2}$

4.2 何が問題か

今回は悪問ではなく、良問を紹介しましょう。もっとも何が悪問で、何が良問かというのは人によって色々意見が違うかもしれません。今までの問題は、そもそも正解が決まらなかったりしますので、悪問であることにあまる異論はないのでしょうか。

では、良問とは何でしょう。いろんな場合があると思いますが、この問題については「ポイントがはっきりしている」と言うことに尽きます。

ただ、この問題では、自分で解いてみないと、そのポイントは見えてこないでしょう。技術系では、問題の正解と公式のみが書かれているものは見かけます。公式や定理を覚えたり慣れたりすることが目的の基本問題では、それでよいでしょう。しかし、ある程度以上の問題では、どうしてその問題が解けないのか、間違ったのか、そして、逆になぜその問題が解けたのか、その差を明らかにすることが大切です。

そして、この問題は正答率が低いのです。それはなぜでしょう。そこを意識せずにいきなり解説を見てしまつては、この問題の大切なポイントを見失ってしまいます。

4.3 解答 1

では、解答してみましょう。与えられた式を使うことは明白です。さらに、平均が 5 分なのですから、 $\lambda = 5$ です。

確率密度関数で最も大切なことは、積分することで確率になるということです。そし

て、この問題では、5分経過したとき、その後5分以内に話し終わる確率を求める必要があります。要するに、5分以上10分以内で通話が終わればよいのです。

これを計算すると、

$$\int_5^{10} \frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}} dx = [-e^{-\frac{x}{5}}]_5^{10} = -e^{-2} + e^{-1}$$

となります。肢3がぴったりですね。

4.4 解答2

実際には、確率分布を用意しなかった受験生も多かったでしょうが、用意した受験生のほとんどが上の解答だったことでしょう。

しかし、これは不正解なのです。この問題の最大のポイントはここにあるのです。

なぜ不正解なのでしょう。やっていることはそんなに筋が悪いようには見えません。

実は、求める確率は「5分以上10分以内で通話が終わる確率」ではないのです。あくまで、「5分経過したとき、その後5分以内に話し終わる確率」なのです。この二つは何が違うのでしょうか。それは、「もう5分は経過してしまった」という点にあります。つまり、通話が5分以内に終わることはもうあり得ません。言い換えれば「5分以上通話が続く中で、5分以上10分以内で通話が終わる確率」なのです。

これは「条件付きの確率」です。5分以上通話が続く確率は、

$$\int_5^{\infty} \frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}} dx = [-e^{-\frac{x}{5}}]_5^{\infty} = e^{-1}$$

となります。この中で、10分以内に終わればよいのですから、

$$\frac{e^{-1} - e^{-2}}{e^{-1}} = 1 - e^{-1}$$

が求める確率となります。

正解は肢4ですね。

4.5 問題のポイント

解答を見てしまえば簡単に見えるかもしれませんが、また、この問題は解けたという人もいたかもしれませんね。

しかし、今回だまされなかったからといって、次もだまされないとは限りません。見分けるポイントはどこなのでしょう。

もし問題文が「5分以上、10分以内で通話が終わる確率はいくらか」であれば、条件付きの確率にはならず、普通の確率で終わりました。それに比べ、この問題文の表現、「電話をし始めてから5分経過したとき、その後5分以内に話し終わる確率はいくらか。」というのは少し遠回しです。表現が遠回しの場合、条件付きの確率が隠れる場合があります。これを意識することが大切です。ここまで踏まえて、初めてこの問題のポイントがわかったことになると思うのです。

逆に意識していないと、確率密度関数ばかりに目が行って、条件付きの確率を忘れてしまう。このポイントがはっきりしているからこそその良問と言えるでしょう。

4.6 その後

しかし、良問だと思ったのは解いてそれを解説する側だけでなかったことが、その3年後にわかります。次の問題は、平成17年の国家I種工学の基礎です。

問題

ある地域では平均すると 25 年に 1 度異常気象が発生する。異常気象の発生した年から x 年以内に次の異常気象の発生する確率 $F(x)$ は、

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{25} e^{-t/25} dt$$

と表される。この地域で最後に異常気象の発生した年から 5 年間異常気象が発生していないとき、今後 5 年以内に異常気象が発生する確率はおよそいくらか。

ただし、 $e^{-0.2} = 0.82$, $e^{-0.4} = 0.67$ とする。

1. 15% 2. 18% 3. 20% 4. 25% 5. 33%

いくら良問だからって、3 年後はないんじゃないの？