

【No. 6】 R^3 内の 2 直線 l, m を,

$$l: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-2} = z-2$$

$$m: x = \frac{y}{2} = -z+4$$

とする。

点 P が直線 l 上を, 点 Q が直線 m 上をそれぞれ動くとき, 線分 PQ の長さの最小値はいくらか。

1. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 2. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 3. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ 4. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 5. $\sqrt{5}$

空間座標は, 以前は高校範囲でした。そのためか, 以前は工学区分でも出題されていたのですが, 近年は出題がありません。一方, 数理科学区分では, 以前の工学と同程度のレベルで出題が続いています。この問題も, 直線はパラメータ表示するという基本さえ知っていれば解ける問題で, 確実に正解したい問題です。昔は国家Ⅱ種レベルだったのですが。

解答

まず, 直線をパラメータ表示する。 l について,

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-2} = z-2 = t$$

とおくと,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t+3 \\ -2t-1 \\ t+2 \end{pmatrix}$$

となる。 m についても同様で, パラメータを s とすると,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 2s \\ -s+4 \end{pmatrix}$$

となる。点 P, 点 Q を表すパラメータも同じ t, s とすると,

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} s-2t-3 \\ 2s+2t+1 \\ -s-t+2 \end{pmatrix}$$

となる。この大きさの最小値を求めればよい。そこで,

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 = (s-2t-3)^2 + (2s+2t+1)^2 + (-s-t+2)^2 = f(s, t)$$

と定義すると,

$$\frac{\partial f}{\partial s} = 2(s-2t-3) + 4(2s+2t+1) - 2(-s-t+2) = 0$$

$$\therefore 2s+t-1=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -4(s-2t-3) + 4(2s+2t+1) - 2(-s-t+2) = 0$$

$$\therefore s+3t+2=0$$

このパラメータ表示が, 空間における直線の扱いの基本です。まずは, 素直な解法を紹介します。

これを解いて、 $s = 1, t = -1$ となる。これより、求める距離の最小値は、

$$\sqrt{f(-1, 1)} = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

これより、正解は肢 5 となる。

別解

直線のパラメータ表示までは、上の解答と同じ方法とする。ここで、 l の方向ベクトルを $\vec{l}$ とすると、

$$\vec{l} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

m の方向ベクトルを $\vec{m}$ とすると、

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

PQ の距離が最小となるとき、 $\vec{l} \perp \overrightarrow{PQ}$ 、 $\vec{m} \perp \overrightarrow{PQ}$ が成立するので、

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s - 2t - 3 \\ 2s + 2t + 1 \\ -s - t + 2 \end{pmatrix} = 2(s - 2t - 3) - 2(2s + 2t + 1) + (-s - t + 2) = -3s - 9t - 6 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s - 2t - 3 \\ 2s + 2t + 1 \\ -s - t + 2 \end{pmatrix} = (s - 2t - 3) + 2(2s + 2t + 1) - (-s - t + 2) = 6s + 3t - 3 = 0$$

(以下は上の解答と同じ)