

【No. 8】 3次元実ベクトル全体のつくる線形空間 V の1組の基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ に関して、線形変換 $f: V \rightarrow V$ を

$$f(e_1) = 2e_1 + e_2 - e_3, \quad f(e_2) = e_1 - e_2 + 2e_3, \quad f(e_3) = -3e_1 + e_2 + 5e_3$$

で定める。このとき、別の1組の基底 $\{e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3\}$ に関する f の表現行列として正しいのは次のうちではどれか。

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -6 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & -6 \end{pmatrix}$

答えを選択肢から選ぶだけならば、具体的に与えられた変換を書き直せば十分で難しくありません。ただ、もっと易しい解答があるのでしょうか。

解答

まず、新しい基底の1つ e_1 の移る先を新しい基底で書き直す。

$$f(e_1) = 2e_1 + e_2 - e_3 = e_1 + 2(e_1 + e_2) - (e_1 + e_2 + e_3)$$

同様にして、

$$f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2) = 3e_1 + e_3 = 3e_1 - (e_1 + e_2) + (e_1 + e_2 + e_3)$$

$$f(e_1 + e_2 + e_3) = f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = e_2 + 6e_3 = -e_1 - 5(e_1 + e_2) + 6(e_1 + e_2 + e_3)$$

したがって、これらの係数を第1列から順に並べて、求める表現行列は、

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \text{ となる。したがって、正解は肢1である。}$$

この時点で、第1列を見れば、正解が肢1に確定します。