【No.　43】 X, Y, Z は独立で，同一の分布に従う確率変数であり，確率密度関数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (x \in (0,2)) \\ 0 & \end{cases}$$

をもつとする。 $E[(X+Y+Z)^3]$ はいくらか。

1．$\frac{9}{2}$　　2．27　　3．36　　4．128　　5．156

解答

明らかに $E[X]$=$E[Y]$=$E[Z]$=1 である。また，

$$E[X^2] = E[Y^2] = E[Z^2] = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \frac{4}{3}$$

$$E[X^3] = E[Y^3] = E[Z^3] = \int_0^2 \frac{x^3}{2} dx = 2$$

である。ここで，

$$(X+Y+Z)^3 = X^3+Y^3+Z^3+3(X^2Y+X^2Z+Y^2X+Y^2Z+Z^2X+Z^2Y)+6XYZ$$

であるので，

$$E[(X+Y+Z)^3] = 3E[X^3] + 18E[X^2]E[X] + 6\{E[X]\}^3 = 6+24+6 = 36$$