

1. 3桁の数字を通信します。この3桁の数字は、各桁が0か1でできていて、「000」「001」「010」...「111」と8種類あります。ところが、通信の質が悪いため、0を1に、1を0に間違える自体が多発しています。実際、1回通信すると、それぞれの桁を間違える確率は $\frac{1}{2}$ になっています。そこで、間違えて通信するリスクを減らすため、ここに1桁のチェックビットを付け加えて通信することにします。つまり、3桁の数にさらにもう1桁付け加えて4桁にして通信することにします。この場合4桁目には、1の数の桁が偶数になるように桁を付け加えます。たとえば「000」なら「0000」、
「010」なら「0101」とします。そして、通信を受け取る側では、受け取った数の1の個数を数えて、奇数ならば通信のやり直しを要求します。このとき、最終的に正しく通信される確率を求めよ。

2. 空間に2つの球がある。2つの球の中心をA、Bとしたとき、ABの中点を通りABに垂直な平面でこの球を切断したところ、切り口の円の半径の差は4だった。一方球の半径の差は2だったとし、 $AB = 12$ とすると、大きい方の球の半径はいくらか。

1. (解法1) まずは、1回の通信でどのような結果になるか計算してみる。

間違いなし 確率 $\frac{1}{16}$...正しく通信

間違い1つ 確率 ${}_4C_1 \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$...やり直し

間違い2つ 確率 ${}_4C_2 \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$...間違えて通信

間違い3つ 確率 ${}_4C_3 \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$...やり直し

間違い4つ 確率 $\frac{1}{16}$...間違えて通信

よって、いずれにしても、通信がなされる場合には、「正しい場合」:「間違っている場合」 $= \frac{1}{16} : \left(\frac{1}{16} + \frac{3}{8} \right) = 1:7$ となる。

したがって、正しく通信できる確率は $\frac{1}{8}$

(解法2) 求める確率を p とする。 p の内訳をみると、「1回で正しく通信」+「1回やり直し」×「やり直して以降正しく受信」となるので、

$$p = \frac{1}{16} + \frac{1}{2}p \quad p = \frac{1}{8}$$

2. 求める平面と球の中心との距離は、どちらの球に対しても6となる。大きい方の球の半径を R とすると、切り口の円の半径を r とし、次の三平方の定理が成り立つ。

$$R^2 = r^2 + 6^2, \quad (R-2)^2 = (r-4)^2 + 6^2$$

これを解いて、 $R = 1 + 2\sqrt{13}$

1は国家I種で2度ほど出されたものと同じ題材で無限試行の確率の問題を出題しました。少し難しかったかもしれませんが。最初の解法1も無限試行の確率として有名な方法ですが、前回の問題はこれではうまくいきません。

2は空間図形の基本です。計算が少し複雑なので、その点が注意です。