

1. 曲線 $C: y = x^3 - 3x$ の2つの接線 L_1, L_2 は、 L_1 と C の接点である点 P (x 座標は2とする) で交わっている。次の2つの場合について、 L_1 と C で囲まれる部分の面積 S_1 と、 L_2 と C で囲まれる部分の面積 S_2 の比 $S_1 : S_2$ を求めよ。
2. 複素数 $z = a + ib$ に対して、座標平面上の点 (a, b) を対応させることを考える。いま、複素数 $z_1 = 1 + i$ の表す点を P_1 として、これに別の複素数 w を考え、 z_1 に w をかけた複素数 z_2 の表す点を P_2 、 w^2 をかけた複素数 z_3 の表す点を P_3 、 w^4 をかけた複素数 z_4 を表す点を P_4 とすると、これらの点はすべて異なったが、 w^6 をかけた複素数の表す点は P_1 と一致した。四角形 $P_1P_2P_3P_4$ の面積を求めよ。

1.

P の x 座標を p とする。また、接線の式を $y = ax + b$ とおき、接線と P 以外の交点の座標を q とおく。このとき、これと C との交点を求めるつもりで方程式をたてると次のようになる。

$$x^3 - 3x - (ax + b) = (x - p)^2(x - q) = x^3 - (2p + q)x^2 + (p^2 + 2pq)x - p^2q$$

この x^2 の係数を比較すると、

$$q = -2p$$

となる。これを前提として求めていく。

L_2 と C の交点 (上の q に相当) の x 座標が2なので、接点は $x = -1$ となる。したがって、

$$S_1 = \int_{-4}^2 (x-2)^2(x+4)dx = \frac{1}{12}(2+4)^4 = 108$$

$$S_2 = \int_{-1}^2 (x-1)^2(2-x)dx = \frac{1}{12}(2-1)^4 = \frac{1}{12}$$

$$S_1 : S_2 = \underline{1296 : 1}$$

2

w^6 をかけて初めて元に戻った、ということは、 w は1の6乗根の1つであるが、 w^2 が元に戻らないので、考えられるものは、

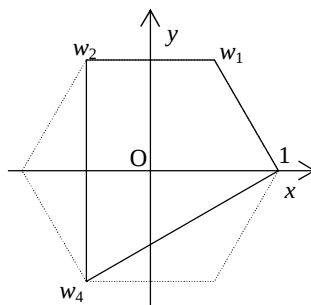
$$w = \cos \frac{2\pi}{3} \pm i \sin \frac{2\pi}{3}$$

か、

$$w = \cos \frac{2\pi}{6} \pm i \sin \frac{2\pi}{6}$$

のいずれかである。前者は原点中心の $\frac{2\pi}{3}$ の回転を表しているが、これだと、 $w = w^4$ となるため、結局後者しかない。

これは、原点中心の $\frac{\pi}{3}$ の回転を表しているので、 $1, w, w^2, w^4$ を表す点を図示すると次のようになる。



この面積を求めると，上側の台形と下側の三角形にわけて，

$$S = \frac{1}{2}(1 + \frac{3}{2}) \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

ここで，これ全体に $z = 1 + i$ をかけたものが求めるものだが，

$$z = 1 + i = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$$

となるので， $\sqrt{2}$ 倍拡大して 45° 回転移動させたものになる。回転移動は関係ないので，拡大分だけ考えると，相似比の 2 乗が面積比になるので，求める面積は $2\sqrt{3}$

1 接線の問題の練習のつもりでした。接線は微分と今回の解答のような因数分解の 2 つの方法があるのですが，過去の地上の問題では，後者の方法の問題がいくつか出題されていました。ちょっと忘れがちな解法ですので，紹介しました。

2 H.20 の国家 I 種の応用問題です。1 の n 乗根の知識がないと手も足も出ないと思います。本文は， w^6 で元に戻った，ということから， 60° 回転あるいは正 6 角形が関係してくる，というところを知識として覚えてもらえればと思います。かなり難しい問題だと思います。