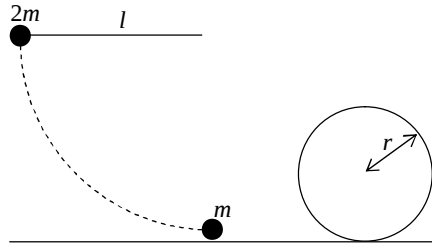


1. 長さ l の単振り子と、長さ L 、鉛直線と糸のなす角が θ の円錐振り子の周期が等しいとき、 l を L 、 θ で表せ。

2. 質量 $2m$ のおもりに長さ l の糸をつけ、他端を高さ l の位置に固定した。この糸を図のように、糸が水平となるようにもちあげて手を離れたところ、水平面上にある質量 m のおもりと衝突した。このおもりがその後、半径 r の鉛直面内のループを、離れずに回転するために必要な最低の l の長さを求めよ。ただし、重力加速度を g とし、摩擦、空気抵抗などは考えない。また、衝突の跳ね返り係数を $1/2$ とする。



1. 長さ l の単振り子の周期は $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ である。そこで、円錐振り子の周期を求める。

円錐振り子の質量を m 、速さを v 、半径を r とするとおもりにはたらく力は図のようになる。

おもりに働く力の三角形について、

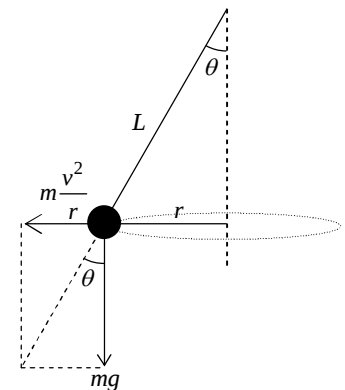
$$\tan \theta = \frac{mv^2/r}{mg} = \frac{v^2}{gr} \quad v = \sqrt{gr \tan \theta}$$

周期は、

$$T = \frac{2\pi}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g \tan \theta}} = 2\pi\sqrt{\frac{L \cos \theta}{g}}$$

周期が等しい場合には、

$$l = L \cos \theta$$



2. 衝突直前の速さ v を求める。

エネルギー保存則により、

$$\frac{1}{2} \times 2m \times v^2 = 2mgl \quad v = \sqrt{2gl}$$

衝突直後の速さ V を求める。

衝突直後の $2m$ のおもりの速さを u 、 m のおもりの速さを V とする。いずれも右向きにとっている。運動量保存則より、

$$2mv = 2mu + mV$$

はね返り係数の関係より、

$$\frac{1}{2} \times v = V - u \quad V = v = \sqrt{2gl}$$

ループを回る条件を求める。

ループの最高点での速さを U とする。エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2} m (\sqrt{2gl})^2 = \frac{1}{2} m U^2 + 2mgr$$

ループ最高点で鉛直方向の力のつり合いより，

$$N + mg = m \frac{U^2}{r}$$

ループ最高点でループから離れないためには，

$$N = \frac{2mgl}{r} - 4mg - mg > 0 \qquad \underline{l > \frac{5}{2}r}$$

1 は単振り子，円すい振り子という定番の問題の，最も基本的な公式の確認のつもりで出題しました。どちらも出題されたら確実にとれるように用意しておいてください。円すい振り子は上の解答ではうまく解いていますが，この解法は有名問題と言うことで，事前に用意していくのですね。

2 は難しめの応用問題です。国家系の問題では，今年の難易度からすると，本試験より難しめになっていますが，地方上級では出されうる範囲内です。とはいえ...本当は誘導をつけるつもりでした。エネルギー保存，衝突，非等速円運動と公務員試験で頻出の内容を詰め込んであります。一つ一つ解き方を確認してってください。