

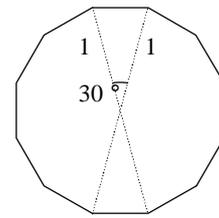
- 1 . (1) 半径 1 の円に内接する正十二角形の面積を求めよ。(H.21 国家 II 種)
 (2) 1 辺の長さが 1 の正十二角形の面積を求めよ。
- 2 . (1) 3 辺の長さが 3, 4, 5 の直角三角形に内接する円の半径を求めよ。
 (2) 3 辺の長さの和が 60 の直角三角形に, 半径 5 の円が内接している。この直角三角形の斜辺の長さを求めよ。
- 3 . 1 辺の長さが 1 の立方体がある。この立方体を, 対角線に垂直な面で切り取るとき, 切り口の面積の最大値はいくらになるか。

1

- (1) 右図のような補助線を引く。一つの二等辺三角形の面積 S は,

$$S = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \sin 30^\circ = \frac{1}{4}$$

したがって, 正十二角形全体の面積はこれを 12 倍して 3

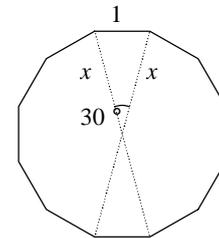


- (2) 右図のように x をおく。余弦定理から,

$$1^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cos 30^\circ \quad x^2 = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

面積は(1)と同様にして,

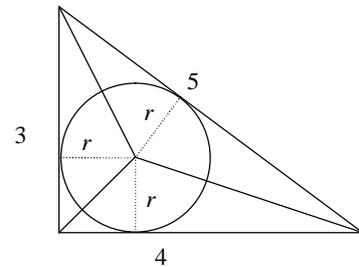
$$12 \times \left(\frac{1}{2} x^2 \sin 30^\circ \right) = 6 + 3\sqrt{3}$$



2

- (1) 右図のような補助線を引く。直角三角形の面積を考える。
 これは 6 と分かっているが, 補助線 (実線) で 3 つの三角形に分けると,

$$6 = \frac{1}{2}(3+4+5)r = 6r \quad \underline{r=1}$$



- (2) 接線の性質から, 右図のように文字をおく。

周の長さが 60 なので,

$$5 + a + b = 30 \quad a + b = 25$$

斜辺の長さは $a + b = 25$

(参考)

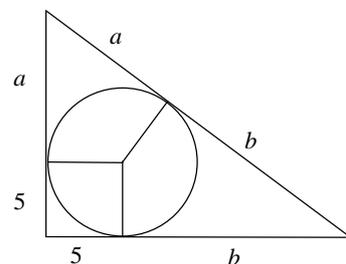
三平方の定理から,

$$(5+a)^2 + (5+b)^2 = (a+b)^2 \quad 50 + 10(a+b) = 2ab$$

この連立方程式を解けばよい。すぐに $ab = 150$ が出てくるので, 解と係数の関係から, a, b は 2 次方程式

$$t^2 - 25t + 150 = (t-10)(t-15) = 0$$

の解となる (面積を求める場合にはここまで計算する必要がある)



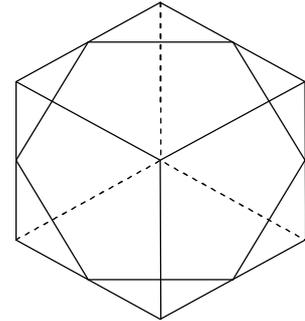
立方体を対角線に垂直な方向からみる。

この場合，求める切り口は垂直に見えているので，ゆがむことなくそのままの形が見える。

最大となるのは対称性から明らかに中央に来たときで，右図のようになる。

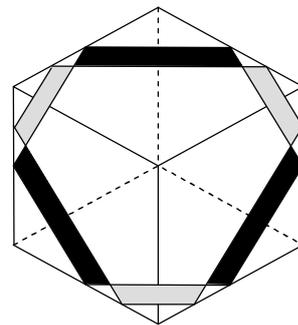
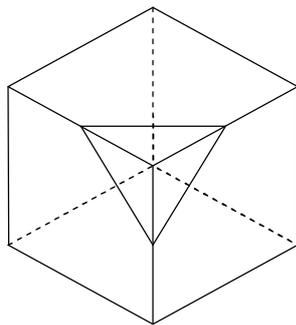
これは正六角形であり，その辺の長さは $\frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから，

$$\text{面積は } 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$



なお，切り口をきちんと調べると次のようになる。

まず，切り口が三角形になる場合は明らかに面積は最大ではない。六角形の場合には，中点を通っている場合を比べてみると，中点を通る正六角形の面積の方が大きいことが分かる（図の黒の面積 > 灰色の面積）。計算をする場合は，六角形の場合には，辺を延長すると常に一辺の長さが $\sqrt{2}$ の正三角形になることを利用するとよい。



1 は国家 II 種で出題された問題です。(1)では三角形の面積の公式の，(2)では余弦定理の練習をすることになりますね。どちらも便利な公式ですから，いつでも使えるようにしておきましょう。

2 は，内接円の 2 つの性質に関する問題です。どちらも有名なのですが，片方を思い出すともう片方を忘れてしまうことがよくあります。(1)は内接円の半径を求めるときに使われる方法で，面積を利用しています。(2)は接線の性質で，外周の長さを求めるときに使います。ただ・・・斜辺だとほとんど計算なしで解けてしまっていますね。これに気付いたら大したものです。ちなみに本試験では「辺の長さも，半径も整数...多分 3 : 4 : 5 か 5 : 12 : 13 の三角形だな」と目星を付けても当然 OK です。今回は前者でしたね。

3 はかなり前に国家 I 種で出題されています。有名問題で，切り口の形などは教養の対策としても覚えておいてよさそうですね。