

[16] あるケーキ店では、ショートケーキが1個300円、チーズケーキが1個500円、ロールケーキが1個700円で売られており、店には、ショートケーキが9個、チーズケーキが13個、ロールケーキが7個だけ残っている。今、この店でこれら3種類のケーキをちょうど1万円分買うとき、ケーキの組み合わせ方は全部で何通りあるか。ただし、それぞれのケーキを少なくとも1個は買うものとする。

- 1 8通り 2 9通り 3 10通り 4 11通り 5 12通り

【No. 16】 正 解 2

(解1) 徹底的に場合分け主義

どれも少なくとも1つは買うので、すでに1個買ったとして、それ以上の分について、ショートケーキを x 個、チーズケーキを y 個、ロールケーキを z 個買うことにする。いずれも0以上で、 x は8以下、 y は12以下、 z は6以下である。3つを1つずつ買うと1500円になるので、金額について次の式が成り立つ。

$$3x + 5y + 7z = 85$$

$z = 0$ のとき

$$3x + 5y = 85$$

あとは、 x に0から代入して、ひたすら大丈夫な場合を考える。

$$x = 0 \quad y = 17 \quad \times$$

$$x = 1 \quad y = 82/5 \quad \times$$

$$x = 2 \quad y = 79/5 \quad \times$$

$$x = 3 \quad y = 76/5 \quad \times$$

$$x = 4 \quad y = 73/5 \quad \times$$

$$x = 5 \quad y = 14 \quad \times$$

$$x = 6 \quad y = 67/5 \quad \times$$

$$x = 7 \quad y = 64/5 \quad \times$$

$$x = 8 \quad y = 61/5 \quad \times$$

$z = 1$ のとき

$$3x + 5y = 78$$

$$x = 0 \quad y = 78/5 \quad \times$$

$$x = 1 \quad y = 15 \quad \times$$

$$x = 2 \quad y = 72/5 \quad \times$$

$$x = 3 \quad y = 69/5 \quad \times$$

$$x = 4 \quad y = 66/5 \quad \times$$

$$x = 5 \quad y = 63/5 \quad \times$$

$$x = 6 \quad y = 12$$

$$x = 7 \quad y = 57/5 \quad \times$$

$$x = 8 \quad y = 54/5 \quad \times$$

$z = 2$ のとき

$$3x + 5y = 71$$

$$x = 0 \quad y = 71/5 \quad \times$$

$$x = 1 \quad y = 68/5 \quad \times$$

$$x = 2 \quad y = 13 \quad \times$$

$$x = 3 \quad y = 62/5 \quad \times$$

$$x = 4 \quad y = 59/5 \quad \times$$

$$x = 5 \quad y = 56/5 \quad \times$$

$$x = 6 \quad y = 53/5 \quad \times$$

$$x = 7 \quad y = 10$$

$$x = 8 \quad y = 47/5 \quad \times$$

$z = 3$ のとき

$$3x + 5y = 64$$

$$x = 0 \quad y = 64/5 \quad \times$$

$$x = 1 \quad y = 61/5 \quad \times$$

$$x = 2 \quad y = 58/5 \quad \times$$

$$x = 3 \quad y = 11$$

$$x = 4 \quad y = 57/5 \quad \times$$

$$x = 5 \quad y = 54/5 \quad \times$$

$$x = 6 \quad y = 51/5 \quad \times$$

$$x = 7 \quad y = 48/5 \quad \times$$

$$x = 8 \quad y = 9$$

$z = 4$ のとき

$$3x + 5y = 57$$

$$x = 0 \quad y = 57/5 \quad \times$$

$$x = 1 \quad y = 54/5 \quad \times$$

$$x = 2 \quad y = 51/5 \quad \times$$

$$x = 3 \quad y = 48/5 \quad \times$$

$$x = 4 \quad y = 9$$

$$x = 5 \quad y = 42/5 \quad \times$$

$$x = 6 \quad y = 39/5 \quad \times$$

$$x = 7 \quad y = 36/5 \quad \times$$

$$x = 8 \quad y = 33/5 \quad \times$$

$z = 5$ のとき

$$3x + 5y = 50$$

$$x = 0 \quad y = 10$$

$$x = 1 \quad y = 47/5 \quad \times$$

$$x = 2 \quad y = 44/5 \quad \times$$

$$x = 3 \quad y = 41/5 \quad \times$$

$$x = 4 \quad y = 38/5 \quad \times$$

$$x = 5 \quad y = 7$$

$$x = 6 \quad y = 32/5 \quad \times$$

$$x = 7 \quad y = 29/5 \quad \times$$

$$x = 8 \quad y = 26/5 \quad \times$$

$z = 6$ のとき

$$3x + 5y = 43$$

$$x = 0 \quad y = 43/5 \quad \times$$

$$x = 1 \quad y = 8$$

$$x = 2 \quad y = 37/5 \quad \times$$

$$x = 3 \quad y = 34/5 \quad \times$$

$$x = 4 \quad y = 31/5 \quad \times$$

$$x=5 \quad y=28/5 \quad \times$$

$$x=6 \quad y=5$$

$$x=7 \quad y=22/5 \quad \times$$

$$x=8 \quad y=19/5 \quad \times$$

以上から、全部で9通り。

(解2) 徹底的変形主義

ショートケーキを x 個、チーズケーキを y 個、ロールケーキを z 個買うことにする。いずれも1以上で、 x は9以下、 y は13以下、 z は7以下である。金額について次の式が成り立つ。

$$3x + 5y + 7z = 100$$

この式を次のように変形する。

$$7(x + y + z - 14) = 2(2x + y + 1)$$

これより、 $2x + y + 1$ は7の倍数で、 $x + y + z$ は16以上の偶数である。つまり $2x + y + 1 = 7, 14, 21, 28$ のみ。

$$2x + y = 6 \quad x + y + z = 16$$

$$x=1 \quad y=4, z=11 \quad (\times)$$

$$x=2 \quad y=2, z=12 \quad (\times)$$

$$2x + y = 13 \quad x + y + z = 18$$

$$x=1 \quad y=11, z=6 \quad ()$$

$$x=2 \quad y=9, z=7 \quad ()$$

$$x=3 \quad y=7, z=8 \quad (\times)$$

$$x=4 \quad y=5, z=9 \quad (\times)$$

$$x=5 \quad y=3, z=10 \quad (\times)$$

$$x=6 \quad y=1, z=11 \quad (\times)$$

$$2x + y = 20 \quad x + y + z = 20$$

$$x=4 \quad y=12, z=4 \quad ()$$

$$x=5 \quad y=10, z=5 \quad ()$$

$$x=6 \quad y=8, z=6 \quad ()$$

$$x=7 \quad y=6, z=7 \quad ()$$

$$x=8 \quad y=4, z=8 \quad (\times)$$

$$x=9 \quad y=2, z=9 \quad (\times)$$

$$2x + y = 27 \quad x + y + z = 22$$

$$x=7 \quad y=13, z=2 \quad ()$$

$$x=8 \quad y=11, z=3 \quad ()$$

$$x=9 \quad y=9, z=4 \quad ()$$

以上より、9通り

なんと面倒な問題です。範囲もあるので地道に解くのでしょうか。実際には捨て問でも構いません。上ではまじめに調べていますが、実際に作業してみると、すぐに規則が見えます。というより、規則があるからこそ時間内に上のような作業が可能になるのです(よく見てみてください。たとえば解1では、 x が1つ増えるごとに、 y の分子は3減っています)。値の範囲を気にしていれば、もう少し場合を減らすこともできます。いずれにしても事前に類題を経験していて、計算に規則があることを知らないととても解く気のしない問題でしょう。