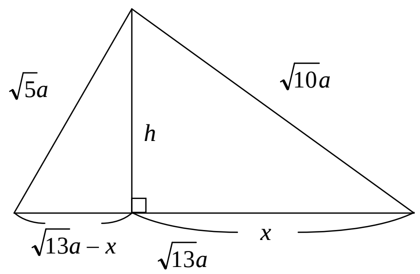
【No.　14】　**正　解　2**

三平方の定理より，三辺の長さは計算できる。そこで，最も長い辺を底辺として，高さを求める。

右図のように x を決めると，h に関して三平方の定理より，

$$10a^2 - x^2 = 5a^2 - (\sqrt{13a} - x)^2 = -8a^2 + 2\sqrt{13}ax - x^2$$

$$\therefore \quad x = \frac{9}{\sqrt{13}}a$$



したがって，

$$h^2 = 10a^2 - \frac{81}{13}a^2 = \frac{49}{13}a^2 \qquad \therefore \quad h = \frac{7}{\sqrt{13}}a$$

求める面積 S は，

$$S = \frac{1}{2} \times \sqrt{13}a \times \frac{7}{\sqrt{13}}a = \frac{7}{2}a^2$$

上の解法はエレガントに見えないかもしれませんが，3 辺の長さがわかっている場合の面積の求め方としてスタンダードなものです。途中 2 次方程式らしきものが見えていますが，実際には 1 次方程式になります。いろんな問題で使うことが出来ますので，是非とも用意しておきたい解法です。

ところで，本問の面積 S は，直方体の 3 種類の面（長方形）の面積 S_1，S_2，S_3 を使うと，

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$$

と表すことができます。こうしてみるとうまい解法がありそうですが，本試験で思いつくものでもありませんし，知ったところで使える問題も少なそうですので，まずは最初の解法をマスターしておくことでしょう。

（＊）とはいえ，上の公式の簡単な由来を説明しておきましょう。実は，一般には多角形 S について，これらの直交 3 平面（たとえば，xy 平面，yz 平面，zx 平面）への正射影を S_1，S_2，S_3 とすると，次の公式が成り立ちます。

$$S^2 = S_1{}^2 + S_2{}^2 + S_3{}^2$$

本問では，正射影は面の半分の三角形になります（そこで上の公式では 1/2 がついています）。

さて，正射影については，面積の公式

$$S_1 = S\cos\alpha$$

があります。$\cos\alpha$ は方向余弦です。さらに方向余弦については，直角 3 方向なら，

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

が成り立ちます。ここに上の式を代入すれば求める公式がでてきます。