［解答］

$$u^2 = y$$

としてこの両辺を微分すると，

$$2u\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}y$$

これを代入して，

$$2xu\frac{du}{dx} - 2u^2 = x^3u \qquad \therefore \quad 2x\frac{du}{dx} - 2u = x^3 \cdots ②$$

ここで，

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{x}\right) = \frac{du/dx}{x} - \frac{u}{x^2} = \frac{1}{2x^2}\left(2x\frac{du}{dx} - 2u\right)$$

となるので，これを使って②の両辺を $2x^2$ で割ってから x で積分すると，

$$\frac{u}{x} = \frac{x^2}{4} + C \qquad \therefore \quad u = \frac{x^3}{4} + Cx$$

これより，

$$\underline{y = \left(\frac{x^3}{4} + Cx\right)^2 = x^2\left(\frac{x^2}{4} + C\right)^2} \rightarrow \text{肢4}$$

［ポイント］

微分方程式の問題で，変数変換の丁寧な誘導がついています。後半は上の解答では何か「正解ありき」に見えますね。実際にはそうではなく，$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2}$ という有名な公式が前提となっています。マイナスではなくプラスだったら，$\mathrm{d}(xy) = x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x$ に着目したはずです。ほとんど同じ解き方になりますが，積分因子法でももちろん解けます。

ただ，本問の場合，選択肢に一般解がありますので，これを代入してみるのもかなり速いですね。アの計算ができれば 2 択ですので，次数だけでもわかれば正解が出てきます。そうなれば，単純に $u = x^n$ を代入して，最高次の次数を比較しても良さそうです（というか微分方程式に慣れていない場合には，それが最短ですね。$n = 3$ はすぐに出てきます）。