[No. 1] ~A~

(解1) 消去法.

$$y = \sqrt{3 - x^2} \ (\geqq 0)$$

$$f(x) = (x^3 + y^3) = x^3 + (3 - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{3}{2}(3 - x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$$

$$= 3x\left(x - \sqrt{3 - x^2}\right) \rightarrow x^2 = 3 - x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

増減表を書く.

x	0	$\cdots\cdots$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$f(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$3\sqrt{3}$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{6}}{2}$	$\nearrow$	$3\sqrt{3}$

max. $3\sqrt{3}$

min. $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ ⇒ 肢3 //

(解2) 文字の置き換え.

$$x^2 + y^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}\cos\theta,\ y = \sqrt{3}\sin\theta \ \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(\theta) = x^3 + y^3 = 3\sqrt{3}(\cos^3\theta + \sin^3\theta)$$

$$f'(\theta) = 9\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta\,(\underbrace{\sin\theta - \cos\theta})$$

$\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ の3ヶ所を調べる。

(*) max, min の候補 ⇒ 極値, 端点

Sample.

(解3) Lagrange の未定乗数法

新関数　　　　新変数

$$F(x,y:k) = \underbrace{x^3+y^3}_{\text{目的関数}} + k(\underbrace{x^2+y^2-3}_{\text{条件}}) \overset{\text{"} 0}{}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 2kx = 0 \Rightarrow 3x + 2k = 0 \cdots ①$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 + 2ky = 0 \Rightarrow 3y + 2k = 0 \cdots ②$$

$$\frac{\partial F}{\partial k} = x^2 + y^2 - 3 = 0 \cdots ③$$

①, ②より $\frac{x}{y} = 1 \Rightarrow x = y$

③より $x = y = \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow x^3 + y^3 = 2\times\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$ //

→ Lagrangeでは出てくるのは極値のみ(端点に注意)

(実は①, ②で $x=0$ or $y=0$ も出ている)

(解4) ① 端点の $x=0$ or $y=0$ は調べる.

② 条件: $x^2+y^2=3$, 目的: x^3+y^3

いずれも対称的 ⇒ $x=y$ は極値候補

$$f = x^3+y^3$$

☆(解5) 全微分 $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 3x^2dx + 3y^2dy \cdots ①$

条件 ⇒ $x^2+y^2=3$ この全微分 ⇒ $2x\cdot dx + 2y\cdot dy = 0 \cdots ②$

$x^2+y^2=3 \cdots ③$　　① − ③ を解く