今週の工学の基礎　2012 年第 1 回

丸山大介*

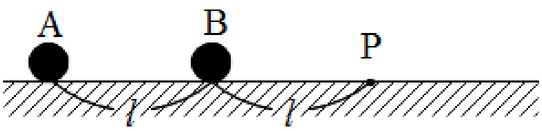
2012 年 1 月 30 日

オリジナルの掲載問題は，出題にミスがあり，ちょっと普通でない答えになっています。以下の通りに修正いたします。大変申し訳ありません。なお，オリジナルの解答も後のページにつけてあります。

【No.　1】(2012.1.23)。滑らかな水平面上に距離 l だけ離れて 2 つの物体 A，B が置かれている。また，A と B のある直線の B の方の延長線上で，B から距離 l 離れた点を P とする。2 つの質量の和は M であり，2 つの物体の間のはね返り係数は 0.5 である。いま，A を B に向けて初速 v で打ち出す。その後 A が B と衝突し，B が P を通過するまでにかかった時間を t とする。このとき，以下の問いに答えよ。ただし，衝突は一瞬で起こったものとする。

(1)　A と B の質量が等しいとき，t を求めよ。

(2)　A に一定の力学的エネルギーを与えるとき，t を最小とするための A の質量を求めよ。



解答：

(1)　衝突後の A の速度を v_A，B の速度を v_B とする（右向きを正とする)。運動量保存則より，

$$\frac{M}{2}v = \frac{M}{2}v_A + \frac{M}{2}v_B$$

はね返り係数が 0.5=$\frac{1}{2}$ なので，

$$\frac{1}{2}v = v_B - v_A$$

これを解いて，

$$v_B = \frac{3}{4}v$$

これより求める時間は，

$$t = \frac{l}{v} + \frac{l}{\frac{3v}{4}} = \underline{\frac{7l}{3v}}$$

(2)　A の質量を m とすると，B の質量は $M - m$ となる。運動量保存則より，

$$mv = mv_A + (M - m)v_B$$

はね返り係数が 0.5=$\frac{1}{2}$ なので，

$$\frac{1}{2}v = v_B - v_A$$

これを解いて，

$$v_B = \frac{3m}{2M}v$$

これより，求める時間は，

$$t(v) = \frac{l}{v} + \frac{l}{v_B} = \frac{l}{v} + \frac{2Ml}{3mv}$$

ここで，与えられた力学的エネルギーは一定なので，

$$E = \frac{mv^2}{2}$$

とおくと，

$$mv = \frac{2E}{v}$$

なので，

$$t(v) = \frac{l}{v} + \frac{Mlv}{3E}$$

したがって，

$$t'(v) = -\frac{l}{v^2} + \frac{Ml}{3E} = -\frac{l}{v^2} + \frac{Ml}{\frac{3mv^2}{2}} = -\frac{l}{v^2} + \frac{2Ml}{3mv^2} = 0$$

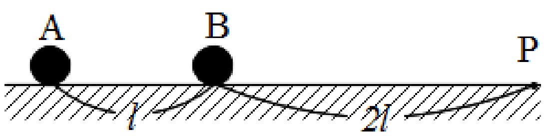
$$\therefore m = \underline{\frac{2M}{3}}$$

こちらはオリジナルの掲載問題です。

【No.　2】(2012.1.23)。滑らかな水平面上に距離 l だけ離れて 2 つの物体 A，B が置かれている。また，A と B のある直線の B の方の延長線上で，B から距離 $2l$ 離れた点を P とする。2 つの質量の和は M であり，2 つの物体の間のはね返り係数は 0.5 である。いま，A を B に向けて初速 v で打ち出す。その後 A が B と衝突し，B が P を通過するまでにかかった時間を t とする。このとき，以下の問いに答えよ。ただし，衝突は一瞬で起こったものとする。

(1)　A と B の質量が等しいとき，t を求めよ。

(2)　A に一定の力学的エネルギーを与えるとき，t を最小とするための A の質量を求めよ。



解答：

(1)　衝突後の A の速度を v_A，B の速度を v_B とする（右向きを正とする)。運動量保存則より，

$$\frac{M}{2}v = \frac{M}{2}v_A + \frac{M}{2}v_B$$

はね返り係数が 0.5$=\frac{1}{2}$ なので，

$$\frac{1}{2}v = v_B - v_A$$

これを解いて，

$$v_B = \frac{3}{4}v$$

これより求める時間は，

$$t = \frac{l}{v} + \frac{2l}{\frac{3v}{4}} = \underline{\frac{11l}{3v}}$$

(2)　A の質量を m とすると，B の質量は $M - m$ となる。運動量保存則より，

$$mv = mv_A + (M - m)v_B$$

はね返り係数が 0.5=$\dfrac{1}{2}$ なので，

$$\frac{1}{2}v = v_B - v_A$$

これを解いて，

$$v_B = \frac{3m}{2M}v$$

これより，求める時間は，

$$t(v) = \frac{l}{v} + \frac{2l}{v_B} = \frac{l}{v} + \frac{4Ml}{3mv}$$

ここで，与えられた力学的エネルギーは一定なので，

$$E = \frac{mv^2}{2}$$

とおくと，

$$mv = \frac{2E}{v}$$

なので，

$$t(v) = \frac{l}{v} + \frac{2Mlv}{3E}$$

したがって，

$$t'(v) = -\frac{l}{v^2} + \frac{2Ml}{3E} = -\frac{l}{v^2} + \frac{2Ml}{\frac{3mv^2}{2}} = -\frac{l}{v^2} + \frac{4Ml}{3mv^2} = 0$$

これより，考えられる範囲では質量を大きくすべきであり，$m = M$ とするのが最もよい。