

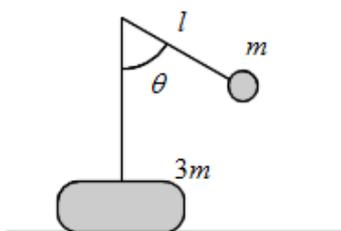
今週の工学の基礎 2012 年第 3 回

丸山大介*

2012 年 2 月 13 日

【No. 1】(2012.2.8) 滑らかな水平面上に、質量 $3m$ の物体が置かれている。この物体には鉛直な棒が取り付けられていて、棒の先端には長さ l の糸と質量 m のおもりでできた単振り子を取り付けられている。ただし、この単振り子は棒とは当たらないようにできている。この単振り子を角度 $\theta = 60^\circ$ から静かにはなすとき、次の問いに答えなさい。ただし、重力加速度は g とし、棒の長さは l より十分に長いものとする。

- (1) 単振り子の糸が鉛直になった瞬間の、おもりの速さを求めなさい。
- (2) 物体は最初の位置から最大でどれだけの距離、水平面上を移動するか。
- (3) 床が物体からうける垂直抗力の最大値はいくらか。



-
- (1) 糸が鉛直になったときの、物体の速さを V 、おもりの速さを v とする。運動量保存則より、

$$mv + 3mV = 0$$

力学的エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}mgl = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{2}mV^2$$

以上を解くと、

$$v = \frac{\sqrt{3gl}}{2}$$

(2) 最初の棒の位置からの重心の水平距離を考える。水平方向に外力がはたらかないので、重心の位置は変わらない。物体が最も動くのは、おもりが左側で一番高いところに来た場合である。このときの、物体の移動距離を（右へ） x とすると、このとき、おもりの位置は、 $x - \frac{\sqrt{3}}{2}l$ となるので、

$$m \frac{\sqrt{3}}{2}l = 3mx + m \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}l \right)$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{3}}{4}l$$

- (3) 物体について鉛直方向の力のつり合いを考える。このとき、糸の張力を T とすると、

$$3mg + T \cos \theta = N$$

* ©MARUYAMA Daisuke 2012 <http://www.maru-will.com/>

一方、おもりは非等速円運動なので、半径方向について、おもりの速さを u として、遠心力を加えた力のつり合いを立てる。ただし、物体が水平方向（図の右方向）に運動していて、ひもはそこに支えられているため、図の左方向に慣性力 F も加わる。これも考えると、

$$T = mg \cos \theta + m \frac{u^2}{l} - F \sin \theta$$

ここで、 $\cos \theta$ はおもりが鉛直になったときに最大となり、さらに速さ u も最大になり、慣性力は 0 になるので、結局このときが最大である。このときの速さは (1) で求まっていて、

$$u = \frac{\sqrt{3gl}}{2}$$

$\cos \theta = 1$ なので、

$$N = 3mg + mg + \frac{3}{4}mg = \frac{19}{4}mg$$

力学の問題を出題しました。(1) は、過去の国家 2 種で何回か出題があった形と同じものです。力学的エネルギーと水平方向の運動量が保存されていることがポイントです。(2) は重心の保存です。重心については、国家 1 種で、回転についてだったり、あるいは必ず重心の位置を求めよ、という形で最近出題があります。今回の問題のタイプでの出題は、古い教養に類題があります。重心の計算はあまり出題がないため、正確に計算できるかどうかチェックしてください。(3) は少し珍しい問題です。解答自体は目新しいことではないのですが、何も思いつかなかった人も少なくないと思います。ここで大切なのは「何を求めるのか」ということです。求めるものは物体に加わる垂直抗力ですから、この力が出てくる何かを立てる必要があります。しかし、物体は鉛直方向には動きませんので、1 つめの式として、「物体についての力のつり合い」がわかります。おもりは「物体から見た場合に非等速円運動」なので、これにあった式を立てます。具体的には、

1. 遠心力を加えて半径方向の力のつり合い
2. 力学的エネルギー保存則

です。ただし、今回は、最初の式には慣性力が加わり、最後の式には物体の運動エネルギーが入るところが難しいですね。

ただ、方針を立てるときに、それなりに必然とも言える考え方があることは知っておいてください。

なお、何について式を立てるのは立てる側の自由なのですが、今回は、物体とおもりを 1 つとみて、全体についての鉛直方向の力のつり合い

$$3mg + mg = N$$

は成立しません。おもりが鉛直方向に移動するため、重心の鉛直方向位置も変化するからです。つまり、鉛直方向にも力はつり合っていないのです。

ところで、垂直抗力を一般に求めるのは、結構難しいですね。最大値だけならいいのですが・・・総合職で機械力学で記述を予定している人は考えてみるとよいでしょう。*1

*1 最大値ではなく、(1) のときの垂直抗力にしてあげればよかったなあ、と後でちょっと思いました