

今週の工学の基礎 2012 年第 4 回

丸山大介*

2012 年 2 月 21 日

【No. 1】(2012.2.13) 3人でじゃんけんをすることを考える。このじゃんけんでは、1人が負けた場合には、勝った2人でじゃんけんを続け、1人の勝者が決まるまで続けるものとする。

- (1) 2回で決着がつく確率を求めよ。
- (2) 3回で決着がつく確率を求めよ。
- (3) 決着がつくまでに行うじゃんけんの回数の期待値を求めよ。

(1) まず、3人でじゃんけんをする場合、あいこになる確率、1人だけ勝つ確率、2人が勝つ確率がそれぞれ $\frac{1}{3}$ になること、2人でじゃんけんをする場合、あいこになる確率が $\frac{1}{3}$ 、勝者が決まる確率は $\frac{2}{3}$ である。
このことを踏まえると、2回で決着が付くのは、次の2通りである。

- (i) あいこ → 1人勝ち

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

- (ii) 2人勝ち → 1人勝ち

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

したがって、求める確率は、

$$\frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$$

- (2) 1回目で2人勝ちの場合、2回目はあいこで、3回目で決着が付けばよいので、

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$$

また、1回目があいこの場合、残り2回で決着が付けばよいが、その確率は(1)で求めているので、

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

したがって、求める確率は、

$$\frac{2}{27} + \frac{1}{9} = \frac{5}{27}$$

- (3) 2人でじゃんけんをする場合、じゃんけんの回数の平均値は、1回で決着がつく確率が $\frac{2}{3}$ なので $\frac{3}{2}$ 回である*¹。
そこで、3人でじゃんけんをする場合の回数の期待値を e 回とする。

そこで、1回目のじゃんけんの結果で場合分けをする。確率 $\frac{1}{3}$ であいことなるが、この場合、平均で残り e 回で決着がつくため、最初の1回と合わせ $e+1$ 回で決着が付くことになる。また、確率 $\frac{1}{3}$ であいことなるが、この場合、残

* ©MARUYAMA Daisuke 2012 <http://www.maru-will.com/>

*¹ たとえば、確率 $\frac{1}{2}$ で当たるくじをくり返すとき、当たるまでの期待値は2回となります。それと同様、確率 p のものをくり返すとき、それが1回起きるまでの回数の期待値は $\frac{1}{p}$ 回です

りは2人でじゃんけんをするため、平均 $\frac{3}{2}$ 回で決着が付くため、最初の1回とあわせて $\frac{5}{2}$ 回で終わることになる。また、残りの確率 $\frac{1}{3}$ で1回で決着がつくことになる。このことから、次の方程式が成り立つ。

$$e = \frac{e+1}{3} + \frac{5}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

$$\therefore e = \frac{9}{4} = 2.25 \text{ 回}$$

(1) は過去に国家2種やあるいは教養などでくり返し出題されている問題です。一方、(3) は最近の理工2の問題です。3人のじゃんけんの回数の期待値というわかりやすいものですが、みなさんの経験、感覚にマッチする結果だったでしょうか？

(3) の方針は特殊だったかもしれませんが、無限試行の確率と呼ばれる問題で、この手の問題を解く場合には典型的な手法です。感覚的には、求めるもの(本問では e) を文字において、その内訳を計算するという方針です。今回の場合、試しに1回じゃんけんをしてみて、その結果で場合分けをしているわけです。この場合、最初と同じ状況に戻ったら、それ以降は再び文字でおくことができることに注意が必要です。ヒント付きですが、H.17に国家I種の理工Iでも出題があります。また、期待値でなく確率ということでしたら、過去にくり返し出題があります。電気・電子・情報職の国家2種でも出題がありますし、H.14国家2種の工学の基礎でも出題があります。

近年の難易度の低下を考えると、少し出にくいかもしれませんが、一度試しに練習すると、万一出題された場合でも対応できるかもしれません。

さて、別解をあげておきましょう。本問の(2)でも、(1)の結果を使ってうまく計算しています。これに気付かない場合は全部の場合を計算することになりますが、これもそれほど面倒ではありません。具体的には、最初に2人勝ちになった場合、2回目に2人勝ちになった場合、3回目でいきなり1人勝ちになった場合の3つに分けて、

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{27}$$

となります。

実は n 回で決着が付く場合にしても、何回目で2人勝ちになったかで場合分けをすれば良いのですが、とにかく途中で2人勝ちになった $n-1$ 通りの場合の確率はすべて $\frac{2}{3^n}$ となり、 n 回目でいきなり1人勝ちになった場合の確率が $\frac{1}{3^n}$ ですので、合計 $\frac{2(n-1)}{3^n} + \frac{1}{3^n} = \frac{2n-1}{3^n}$ と求められます。この場合は、この方が簡単ですね。

ただ、ここから期待値を求める場合には、少々テクニックが必要です。とはいえ教養で出題される範囲内なのですが、計算してみましょう。 n 回目までの和を S_n とします。

$$S_n = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{3}{9} + 3 \times \frac{5}{27} + 4 \times \frac{7}{81} \cdots + n \times \frac{2n-1}{3^n}$$

したがって、

$$\frac{1}{3} S_n = 1 \times \frac{1}{9} + 2 \times \frac{3}{27} + 3 \times \frac{5}{81} + 4 \times \frac{7}{243} \cdots + n \times \frac{2n-1}{3^{n+1}}$$

項をずらして引き算すれば、

$$\frac{2}{3} S_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{5}{9} + \frac{9}{27} + \frac{13}{81} \cdots + \frac{4n-3}{3^n} \right) - \frac{n(2n-1)}{3^{n+1}}$$

上の()の部分を T_n とおくと、

$$T_n = \frac{5}{9} + \frac{9}{27} + \frac{13}{81} \cdots + \frac{4n-3}{3^n}$$

$$\frac{1}{3} T_n = \frac{5}{27} + \frac{9}{81} + \frac{13}{243} \cdots + \frac{4n-3}{3^{n+1}}$$

したがって、

$$\frac{2}{3} T_n = \frac{5}{9} + \frac{4}{27} + \frac{4}{81} + \frac{4}{243} \cdots + \frac{4}{3^n} - \frac{4n-3}{3^{n+1}} = \frac{5}{9} + \frac{\frac{4}{27}(1 - \frac{1}{3^{n-1}})}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{4n-3}{3^{n+1}} \rightarrow \frac{5}{9} + \frac{2}{9}$$

よって,

$$T_n \rightarrow \frac{7}{6}$$

ですので,

$$S_n \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{7}{4} = \frac{9}{4}$$

となります。なお、分母が指数関数、分子が多項式の場合 0 に収束することは前提としました。これはかなり大変な計算ですが、繰り返し公比をかけて引き算するという計算を使っていますね。