2012　今週の工学の基礎　第 7 回

丸山大介*

2012 年 4 月 20 日

【No.　1】(2012.3.21)xy 平面上に 2 点 A(4,0)，B(0,-3) と $x^2+y^2=1$ 上の動点 P がある。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ の最大値を求めよ。

(解法１)　直接微分する

動点 P を (x,y) とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\begin{pmatrix}x-4\\y\end{pmatrix},\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\begin{pmatrix}x\\y+3\end{pmatrix}$$

となるので，求める内積は，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=x^2-4x+y^2+3y$$

となる。

ここで，

$$x^2+y^2=1$$
$$\therefore y=\sqrt{1-x^2}$$

なので，

$$x^2-4x+y^2+3y=-4x+3\sqrt{1-x^2}+1=f(x)$$

とすると，

$$f'(x)=-4-\frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

これを解くと，

$$x=\pm\frac{4}{5},y=\pm\frac{3}{5}$$

x は負，y は正の方が値が大きくなるので，このようにとると，

$$x^2-4x+y^2+3y=1-4x+3y=6$$

(解法２)　ラグランジュの未定乗数法を使う

$f(x)$ を求めた後，次の関数を作る。

$$F(x.y;k)=-4x+3y+k(x^2+y^2-1)$$

これを各文字で偏微分する。

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-4+2kx=0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}=3+2ky=0$$

* ©MARUYAMA Daisuke 2012 http://www.maru-will.com/

これより，

$$\frac{x}{y} = -\frac{4}{3}$$

これと $x^2+y^2=1$ より x, y を求めればよい。

（解法３）　単位円であることを利用する

動点 P を $(\cos\theta, \sin\theta)$ とおく。この場合求める内積は次のようになる。

$$x^2-4x+y^2+3y = 1-4\cos\theta+3\sin\theta$$

ここで三角関数の合成公式を使うと，

$$1-4\cos\theta+3\sin\theta = \sqrt{3^2+4^2}\sin(\theta+\phi)+1 = 5\sin(\theta+\phi)+1$$

この最大値が 6 であることはほぼ明らかである。

この問題はシンプルですが，それだけにいろいろな解法があり，研究する余地が大きいと思います。現実的には解法３が有力ですが，これは単位円でないと使えません。たとえば，国家 I 種農学 II ではより複雑な条件で出題があり，これは三角関数の公式を使って解くわけにはいきません。そのような場合に有力なのが解法 2 となります。

多くの問題では解法 2 を持ち出すことなく解くことができますが，計算力も減りますので，是非ともおさえておきたい方法と言えます（国家 I 種では，これを使わないとなかなか解けない問題も出題されています）。

いずれにしても最大・最小の問題は繰り返し出題されています。本試験までにしっかりと対応しておいてください。