

2012 今週の工学の基礎 第10回特別編

丸山大介*

2012 年 6 月 11 日

【No.1】2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

において, B は逆行列をもち,

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を満たすとき, a と b の値の組合せとして正しいのはどれか。(H.24 労基 B)

- | | a | b |
|----|-----|-----|
| 1. | -2 | 0 |
| 2. | -2 | -1 |
| 3. | -1 | -1 |
| 4. | -1 | -2 |
| 5. | 0 | -2 |

【No.2】関数 $y = x^x (x > 0)$ を微分したものとして正しいのはどれか。(H.24 労基 B)

- | | | | | | |
|----|-----------------------|----|-----------------------|----|-----------------------|
| 1. | $y' = (\ln x + 1)x^x$ | 2. | $y' = (\ln x + e)x^x$ | 3. | $y' = (\ln x + x)x^x$ |
| 4. | $y' = (\ln x + 1)e^x$ | 5. | $y' = (\ln x + e)x^e$ | | |

* ©MARUYAMA Daisuke 2012 <http://www.maru-will.com/>

【解答 1】 正解 4 難易度 A

問題の式の、左から B をかけて、

$$AB = B \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、左辺は、

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+b & 1 \\ ab & 0 \end{pmatrix}$$

右辺は、

$$B \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

となるので、これらが等しくなるためには、 $b = -2, a = -1$ となる必要がある。

ポイント

どんどん成分計算していくといいでしょう。ただし、そのまま計算すると逆行列が必要になりますので、さすがにここだけは変形しておきます。念のため、

$$B^{-1} = \frac{1}{b} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & -1 \end{pmatrix}$$

ですが、なお、与えられた式は思わせない形をしています。これは、対角化と呼ばれるもので、行列 A が固有値 $-1, 1$ をもち、それぞれの固有値に対する固有ベクトルが行列 B に並んでいる、ということを意味します。ここから本問を解くことは結局遠回りとなりますが、過去の地方上級で、固有ベクトルを求める問題が出たことがありますので、気になる人は定義を覚えておくといよいでしょう。一般に、行列 A と定数 k 、零ベクトルではないベクトル $\vec{a}$ に対して、

$$A\vec{a} = k\vec{a}$$

を満たす時に、 k を固有値、 $\vec{a}$ を固有ベクトルといいます。

さらに、今回の式を n 乗することで、

$$(B^{-1}AB)^n = B^{-1}A^nB = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となることも過去の国家 II 種で出題されています。これも合わせておさえておくといよいでしょう。何と言っても、行列は昨年国家 II 種で出ていますから。

【解答 2】 正解 1 難易度 A

両辺の自然対数を取って，

$$\ln y = x \ln x$$

両辺を x で微分すると，

$$\frac{1}{y}y' = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$\therefore y' = (\ln x + 1)y = (\ln x + 1)x^x$$

ポイント

いわゆる「対数微分」とよばれるものですが，要するに，対数を取った式をそのまま微分すればいいわけです。このときに， x で微分しているのですから，左辺は合成関数の微分となることに注意が必要です。この手法は，様々な形で過去に出題されています。