2012　今週の工学の基礎　第13回特別編

丸山大介*

2012年6月13日

【No.1】次の無限級数の収束・発散についての記述として正しいのはどれか。(H.24 労基 B)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

1.　この無限級数は収束して，その和は $\frac{1}{4}$ である。
2.　この無限級数は収束して，その和は $\frac{1}{2}$ である。
3.　この無限級数は収束して，その和は $\frac{3}{4}$ である。
4.　この無限級数は収束して，その和は 1 である。
5.　この無限級数は発散する。

【No.2】地球の周りを等速円運動している人工衛星の軌道半径が4倍になると，その公転周期は何倍になるか。(H.24 労基 B)

1.　$\frac{1}{2}$ 倍　　2.　2倍　　3.　4倍　　4.　8倍　　5.　16倍

【解答 1】　正解 5　難易度 A

分母を有理化して

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1)-n}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

したがって，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sqrt{n+1}-1$$

これより，$n\to\infty$ とすると無限大に発散する。

ポイント

昨年，地方上級で部分分数を利用した無限級数の問題が出題されています。そう考えると，このような分母の有利化を利用した問題も考えられますね。この他，国家 I 種では近年，区分求積を利用した問題も出題されました。いずれにしても公務員試験のように短い時間での解答が要求される場合には，経験が大きく物を言う分野です。

【解答 2】　正解 4　難易度 B

人工衛星の軌道半径を r，人工衛星の質量を m，地球の質量を M，万有引力定数を G とすると，人工衛星に加わる万有引力と遠心力がつり合うことから，角速度を ω とすると，次の式が成り立つ。

$$\frac{GMm}{r^2}=mr\omega^2$$

$$\therefore \omega=\sqrt{\frac{GM}{r^3}}$$

ここで，周期 T は，

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

となるので，r の $\dfrac{3}{2}$ 乗に比例する。すなわち，r が 4 倍になれば，T は $4^{\frac{3}{2}}=8$ 倍になる。

ポイント

ケプラーの法則を知っていれば，代入するだけで解くことができるのですが，出題頻度が低いですから，覚えていない人が多いでしょう。その場合でも万有引力の公式を覚えていれば上のように導くことができます。万有引力の問題は過去に国家 II 種では出題がありますが，地方上級では出題がありません。いずれにしても，基本的な問題を解けるようにしておけば十分でしょう。