

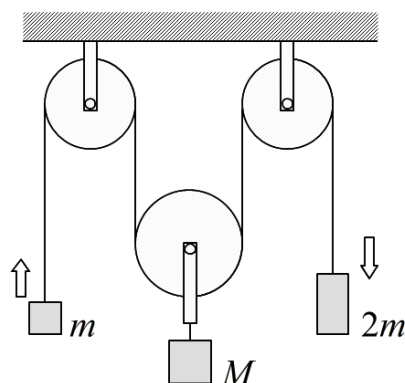
2013 今週の工学の基礎 第1回

丸山大介*

2013年2月28日

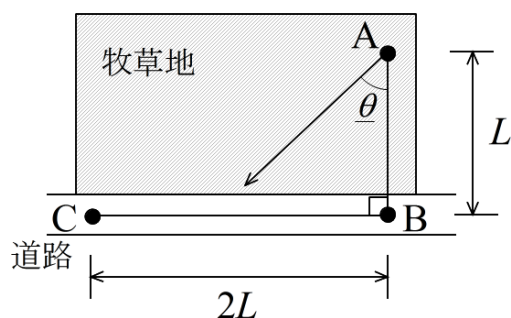
【No. 1】(2013.2.27) 図のように、質量 M のおもりを付けた動滑車を糸で支え、その糸の両端に質量 m , $2m$ のおもりを結び、その糸を2個の定滑車にかけて手を放した。すると、質量 M のおもりは静止したままで、質量 m , $2m$ のおもりはともに同じ加速度でそれぞれ上昇、下降した。このとき、 M を m で表せ。

ただし、滑車の質量は無視できるものとし、糸は鉛直になっているものとする。



【No. 2】(2013.2.27) 図のように直線道路に接した牧草地内の A 点から道路上の C 点へトラクタでべール（草の塊）を運搬する場合の最短時間（秒）を求めよ。

ただし、AB 間の距離は L m, BC 間の距離は $2L$ m, 牧草地内での運搬速度は 2.0 m/s, 道路上の運搬速度は 4.0 m/s とする。また、牧草地内での経路に制約はなく、いずれの場所からでも道路に進入できるものとする。また、 $\sqrt{2} = 1.41$, $\sqrt{3} = 1.73$ とせよ。

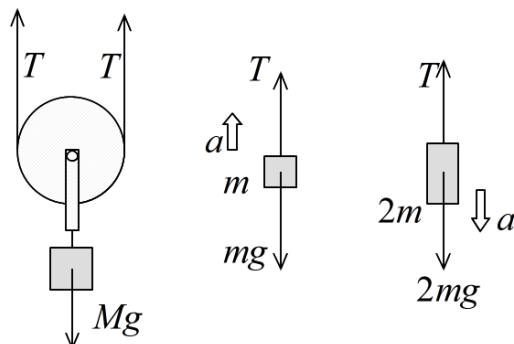


【No. 1】

* ©MARUYAMA Daisuke 2013 <http://www.maru-will.com/>

糸の張力を T とする。動滑車は動かないので、動滑車について力のつり合いを立てると、

$$2T = Mg \quad (1)$$



そこで、 T をもとめるために、残りのおもりについて運動方程式をたてる。おもりの加速度を a (進行方向を正とする) とおく。

左のおもりについて、

$$ma = T - mg$$

右のおもりについて、

$$2ma = 2mg - T$$

これを解くと、

$$a = \frac{g}{3}, \quad T = \frac{4}{3}mg$$

これを式 (1) に代入して整理すると、

$$\underline{M = \frac{8}{3}m}$$

コメント

ちょっと工夫された滑車の問題です。最初に何をしたいのかわからないという人も多かったでしょう。ここで大切なことは「一つ一つ物体を決めて見ていく」ということです。この問題で出てくるのは、3つのおもりと2つの定滑車、1つの動滑車です。この世界にはこの6つしか物体がないのですが、これを1つ1つ見ていけば、必ず答えは出てくるはずです。実際には、2つの定滑車は力を変えるだけですし、中央のおもりと動滑車は一つとみるべきでしょうから、全部で3つしか物体はないのです。

困ったときこそ、1つ1つ物体を決めて考える、ということを思い出してください。この問題では、そうすると、ポイントが糸の張力にあることがわかり、糸の張力を求めるのであれば、これは定滑車の基本問題となります。(実際には、とりあえず先に運動方程式を立てた人もいるでしょうが、その場合でも、その後どうするかを決めるために、動滑車に注目しないといけません)。

何となく問題が解ける、というのではなく、「1つ1つ見ていけば必ず解ける」と確信(理由)を持って考えようとしたとき、初めて本当の実力がついてきた、といえるでしょう。

[No. 2]

(解1) 角度 θ を使う

問題文に与えられた図に書かれている θ を用いて、経路を求める。牧草地を通る長さは $\frac{L}{\cos \theta}$ であり、道路を通る長さは $2L - L \tan \theta$ である。

したがって、A から C までの時間 t は、

$$t(\theta) = \frac{L}{2 \cos \theta} + \frac{L}{2} - \frac{L \tan \theta}{4}$$

これを θ で微分して,

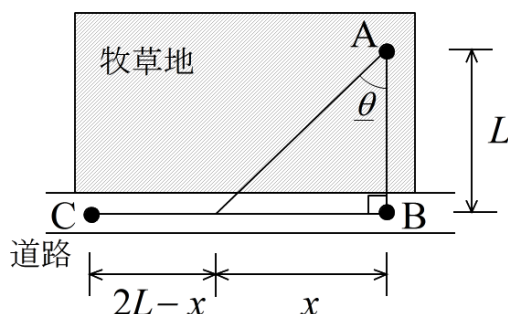
$$t'(\theta) = -\frac{L(-\sin \theta)}{2 \cos^2 \theta} - \frac{L}{4 \cos^2 \theta} = \frac{(2 \sin \theta - 1)L}{4 \cos^2 \theta} = 0$$

これより, $\sin \theta = \frac{1}{2}$ つまり $\theta = \frac{\pi}{6}$ である。このとき,

$$t\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{L}{\sqrt{3}} + \frac{L}{2} - \frac{L}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}L + \frac{L}{2} = \underline{0.93L}$$

(解 2) 長さを文字で置く

下の図のように道路の長さを x とする。



このとき, 牧草地を通る長さが $\sqrt{x^2 + L^2}$ なので, 求める時間は,

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + L^2}}{2} + \frac{2L - x}{4}$$

したがって,

$$t'(x) = \frac{x}{2\sqrt{x^2 + L^2}} - \frac{1}{4} = 0$$

これを解くと $x = \frac{L}{\sqrt{3}}$ となる (以下解 1 と同じ)。

コメント

微分の計算問題です。まず, 自分で文字を決めて立式して, 微分するという手順になります。三角関数を使っても, x を使っても合成関数の微分になるため, 計算力が要求されます。しかし, このくらいの微分計算ができるように計算練習をしておくべきでしょう。

ところで, この問題には全く別のアプローチがあります。それは, 波の知識を流用する方法です。実は, 波の伝播の仕方には次のフェルマーの原理が成立します「波は, 最短時間の経路を進む」。この最短時間というのは, まさに今回の問題のトラクタの進み方と同じですね。

さて問題では, 牧草地の速度は, 道路の $\frac{1}{2}$ です。もし, トラクタが光だとすると, 牧草地は屈折率 2 の物体ということになります。牧草地が水 (かガラス) だとして, A を光源だとすると, 光が C へ行くまでに, 境界面で屈折して, その外を (境界面の道路に沿って) 通っていったことになります。この進み方は, 全反射の公式と全く同じですね。ですので, 全反射の公式を使うと,

$$\sin \theta = \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \quad \therefore \theta = 30^\circ$$

となります。

今回は試験の練習用には微分計算の練習が目的となりますが, 出題した本当の意図は, こんなおもしろい発想もあるのだ, ということを紹介したかったから, ということもあります。