

## 2013 今週の工学の基礎 第5回

丸山大介\*

2013年4月26日

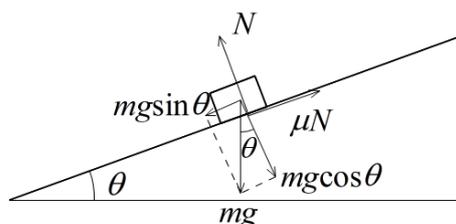
【No. 1】(2013.4.2) 固定されている半径が  $a$  の球面の内側を、質点とみなせる虫が最下点から出発して内壁をゆっくり登る。球面と虫の静止摩擦係数を  $0.75$  とする。虫が登ることができる高さはいくらか。

【No. 2】(2013.4.2)  $y = 2x^2$  と  $y = 8$  で囲まれた部分を  $x$  軸を中心に回転させたときにできる部分の体積を求めよ。ただし、円周率は  $\pi$  とする。

---

【No. 1】

まず、虫が滑ってしまうための傾きの条件を求める。そのため、まずは傾きが一定の斜面で考える。



虫の質量を  $m$  とおいて、図のように力をおくと、

$$N = mg \cos \theta$$

$$\mu N = mg \sin \theta$$

これを解くと、

$$\tan \theta = \mu = 0.75$$

となる。この角度になるまで虫は上ることができる。

次に、この角度となる高さを求める。一般に、関数  $y = f(x)$  のグラフと、 $x$  軸方向のなす角度を  $\theta$  とすると、

$$f'(x) = \tan \theta$$

となる。

ここで、半径  $a$  の球の式は

$$x^2 + y^2 = a^2$$

であり、これを  $x$  で微分すると、

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 2x + 2y \tan \theta = 0$$

これより、

$$x = -\tan \theta y = -0.75y$$

---

\* ©MARUYAMA Daisuke 2013 <http://www.maru-will.com/>

これを円の式に代入すると、

$$(-0.75y)^2 + y^2 = \frac{25}{16}y^2 = a$$

$$\therefore y = \pm \frac{4}{5}a$$

これは円の最下点からの高さ  $\frac{a}{5}$  のところである。

**ポイント**

問題文は短いですが、非常に難しい問題です。

解答は2つの部分に分けられます。まずは、力のつり合いから、虫がすべる条件（傾き）を求めることです。この部分は難しくありません。

後半は、その傾きになる高さを求める部分です。こちらは実質的に数学ですが、慣れていないと難しいかもしれません。ただし、似たような問題は国家I種の数学で何回か出題されています。なお、実は  $\tan \theta = -0.75$  も条件にあうのですが、対称性からこちらは無視しています。

【No. 2】

まず、曲線と曲線の交点は  $x = \pm 2$  である。そこで、回転体の体積の公式より、求める体積は、

$$\pi \int_{-2}^2 8^2 - (2x^2)^2 dx = 2\pi \int_0^2 8^2 - (2x^2)^2 dx = 2\pi \left[ 64x - \frac{4}{5}x^5 \right]_0^2 = \frac{1024}{5}\pi$$

**ポイント**

2つの図形に囲まれた部分を回転させたときの体積の問題です。公式に代入するだけですが、公式を勘違いしないことと、正しく計算することが大切です。