H.25 年【No. 8】

3次元ベクトル空間 E の基底を $\{e_1, e_2, e_3\}$, 2次元ベクトル空間 F の基底を $\{f_1, f_2\}$ とする。線形写像 $\varphi: E \rightarrow F$ が,

$$\varphi(e_1 + e_2) = f_1 - 3f_2, \quad \varphi(e_1 + e_3) = 2f_1 + f_2, \quad \varphi(e_2 + e_3) = 4f_2$$

を満たすとき, $\varphi(e_1 + e_2 + e_3)$ として正しいのはどれか。

1. $f_1 + f_2$ 2. $f_1 + \frac{3}{2}f_2$ 3. $\frac{3}{2}f_1 + f_2$ 4. $3f_1 - 2f_2$ 5. $3f_1 + 2f_2$

線形写像であることが最も重要なポイントですね。逆に言えばそれだけの問題です。

解答

線形性を利用する。

$$\varphi(e_1 + e_2) + \varphi(e_1 + e_3) + \varphi(e_2 + e_3) = 2\varphi(e_1 + e_2 + e_3)$$

であるので,

$$\varphi(e_1 + e_2 + e_3) = \frac{1}{2}(f_1 - 3f_2 + 2f_1 + f_2 + 4f_2) = \frac{3}{2}f_1 + f_2$$