

H.25 年【No. 11】

4 次実正方行列 A は $A^6=E$ (E は単位行列) を満たし、互いに異なる四つの固有値 $1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ をもつとする。このとき、行列 $B = \sum_{k=1}^6 A^k$ のトレース $\text{tr } B$ はいくらか。

1. 0 2. 3 3. 6 4. 9 5. 12

固有値とトレースについての性質についての知識が必要な問題で、他の問題よりもレベルの高い問題です。トレースが固有値の総和であること、行列を n 乗すると固有値も n 乗になること、及び 1 の n 乗根についての性質について、一つ一つは基本的なことでしょうが、全部出てきているところが難しいと思います。

解答

λ が A の固有値のとき、 λ^6 が A^6 の固有値となる。一方、単位行列の固有値は 1 しかなく、 A の固有値がすべて異なるので、 λ_i はすべて 1 の 6 乗根 (虚数) となる。したがって、

$$\lambda_i^5 + \lambda_i^4 + \lambda_i^3 + \lambda_i^2 + \lambda_i + 1 = 0$$

次に、一般に $\text{tr } P$ は行列 P の固有値の総和に等しい (重解がある場合は、その分だけ加える)。また、 $\text{tr}(P+Q) = \text{tr}(P) + \text{tr}(Q)$ が成立するので、結局、求める $\text{tr } B$ は、各固有値 λ について、 $\lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1$ を計算してその総和をとったものとなる。しかし、複素数の固有値に関してはこれは 0 であり、固有値 1 のみ 6 となる。したがって、もとめる値は、 $\text{tr } B = 6$ である。