

第 3 章

微分

この章からが数学の本番になります。微分は国家一般職、国家総合職、地方上級のいずれでも 1 問以上出題があります。特に地方上級はほとんどの場合 1 問の出題があります。

出題のバリエーションは様々で、年代によってはやりもあるのが普通です。近年の国家一般職には極端に簡単な計算問題も出題されていますが、国家総合職を含めても単に計算するだけの問題がありますので まずは微分計算の練習が必要となると考えています。この場合に、無理関数及び合成関数の微分が含まれた微分計算ができるかどうかというのが一つの目安になるのではないかと思います。これが計算できれば、練習問題のいくつかで、うまい解法を取らずに強引に計算に持ち込むことが可能となるからです。

次に、様々な問題を紹介していますが、特に、「条件付き最適化」「式からの微分」を意図的に掲載しています。まず、「条件付き最適化」の問題はそもそも頻出です。一般に計算量も多くなるところです。工学の基礎のみならず、専門でも応用され、しかも専門で出題されると同じ問題でも意表を突かれるのか工学の基礎以上に手も足も出なくなるようです。そのため、工学の基礎の段階でしっかりとした理解が必要だと考えています。個人的に「計算すれば解ける」という説明では、実際には解けないという感覚を持っていて、「いかに計算まで正しくできるようにするか」と考えているということの反映です。

次に「式からの微分」ですが、これは、専門への応用を狙っています。工学の基礎でも出題はあるのですが、専門でも相当に応用されます。出題としては、国家総合職が多いのですが、過去には国家一般職 (II 種) や地方上級でもやや難しい問題が出題されています。

このほか、極限についてもここでまとめておきました。極限は近年出題が目立つようになった分野です。ただし、区分求積法だけは第 4 章に回しています。

一方で、単純な接線の問題は出題が少なくなっています。ただし、国家総合職ではいくつか見られたため、掲載しておきました。

【例題 3-1】(H.20 地方上級)

易しい問題ですが、微分の計算練習として選びました。代わりに様々な解法を載せています。

【例題 3-2】(H.20 国家 II 種)

無理関数の微分の計算練習として掲載しました。解法 2 では三角関数の公式を使って計算を減らしていますが、微分すること自体が目的ですので、解法 1 を本解答としています。無理関数の微分は、後のラグランジュの未定乗数法などを用いない場合には重要な微分となりますので、このレベルまで確実に微分できる計算力がほしいと考えています。

「アドバイス」にも書いていますが、増減表は書いていません。このところは、わかっている、増減表を書く方が厳密に論理的だ、あるいは、万一端点が極値になるような引っ掛け問題の場合に備えて、増減表を書く癖をつけるべきだ、という意見もあるかと思えます。

本文の場合、端点で $y = 0$ となることから極値で最大となることは明白ですが、試験時

問題の No.3 になります

一例として、土木では $b^2 + h^2 = 1$ のとき、 $f(b, h) = b^3 h$ の最大値を求める問題がありました。 $h = \sqrt{1 - b^2}$ を代入するだけのようになっていますが、実際にはほとんど計算できていないようです

工学の基礎で端点が正解になった例は、H.18 国家 I 種にあります。このときは、最大と最小の両方を求めるため、極値も正解の上、端点を調べる必要性は明白でした。さらに、実は端点も極値になっていました。教養試験では、極値が不正解で、端点が正解となる例を 1 度見たことがあります

間（1問3分程度）と手間、それに実際的な必要性（唯一の極値が正解となる問題がほぼすべて）から省いています。もちろん、減多にないとはいえ、今後はそうではない出題もあり得ないとは言えませんので、ここは考え次第だと思います。

【例題 3-3】(H.25 労基 B)

ロピタルの定理を使った極限の練習と共に、無理関数の微分の練習を兼ねています。ロピタルの定理を使った出題は、労基の他には、H.24 国家総合職で見られます。解法 2 はやや不自然な解法に思われますが、極限の問題自体が少ないため、分子の有理化の計算例として見せるために用意してあります。分子の有理化の問題は、練習問題の No.4 にあります。

【例題 3-4】(H.11 国家 II 種)

最大、最小の基本的な問題として用意しました。単純な計算のみではなく、立式を要求するのが公務員試験の特徴で、これは典型的な問題と言えます。出典は古い問題ですが、立体の展開図の問題は過去に数回似たような問題が出題されたことがあります。

まず手が止まるのは立式のようです。解答では敢えて新しい文字 y を導入していますが、これは立式をしやすくする意味があります。式がなければ微分計算もできませんので、必要な文字を積極的に導入して、式を立てることを重要視する、という狙いをもっています。

もちろん、文字の数が増えると計算量も増える心配があります。今回は非常に簡単に 1 文字消去できていますが、仮に 1 文字消去できない場合でも、次に出てくるラグランジュの未定乗数法があります。このあたりの「立式優先」の考え方は、ラグランジュの未定乗数法を学習した後の方が、説得力があるかもしれません。

【例題 3-5】(H.24 地方上級)

ラグランジュの未定乗数法の練習問題です。解法 2 の方が自然に見えるかもしれませんが、実際には正答率はかなり低いようです。計算力がある人には計算の先が見えても、計算力がないと、そもそも計算すること自体を思いつかない、ということになるのでしょう。

ラグランジュの未定乗数法の中では、偏微分まではできても、その後の連立方程式でつまづくことが多いようです。これも、「新しく導入した変数を消去する」という計算の方針をはっきりさせるのがよいようです。

なお、選択肢から R の y 座標がわかりますので、ここから面積を計算して、最も大きいものを選ぶ方法もあったようです。

【例題 3-6】(H.13 国家 II 種)

式を直接微分して速度を求める問題の練習問題です。一時期に比べて工学の基礎での出題は減少しましたが、機械職の機械力学では頻出ですし、土木職の水理学での式の導出でも応用できます。このように専門への対応まで含めればかなり重要な問題と言えます。このほかにも、化学職（機械職も）であれば、ファンデルワールスの式から臨界の条件を求める計算で、計算量を減らすことに応用がききます。

たとえば、H.25 国家総合職では、

$$p = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2}$$

から b を V_m で表す問題が出されていますが、これは結局極値を計算することになります。これを

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$$

としてから V_m で微分すると、

むしろこの形の方が自然だと思います

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V_m} - \frac{2a}{V_m^3}\right)(V_m - b) + \left(p + \frac{a}{V_m^2}\right) = 0$$

もう1度微分すると,

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V_m^2} - \frac{6a}{V_m^4}\right)(V_m - b) + 2\left(\frac{\partial p}{\partial V_m} - \frac{2a}{V_m^3}\right) = 0$$

となり, これら2式に $\frac{\partial^2 p}{\partial V_m^2} = \frac{\partial p}{\partial V_m} = 0$ を代入すると,

$$\begin{aligned} -\frac{2a}{V_m^3}(V_m - b) + 2\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right) &= 0 \\ -\frac{6a}{V_m^4}(V_m - b) + \frac{4a}{V_m^3} &= -\frac{2a}{V_m^3} + \frac{6ab}{V_m^4} = 0 \end{aligned}$$

となりますが, ここからはすぐに,

$$b = \frac{V_m}{3}$$

が求まります。

いずれにしても, $y =$ としなくても, いつでも必要なところから必要な文字で微分できる, という意識を持ってもらうために掲載しました。

ただし, 内容が専門をふまえてやや高度ですので, 最後にしてあります。なお, この船を題材として問題は, 地方上級でも過去に出題があります。

【No. 1】(H.24 国家一般職)

例題 3-1 の練習問題として選びました。内容もほぼ同じです。

【No. 2】(H.25 地方上級)

積の微分の計算練習として選びました。

【No. 3】(H.20 国家 I 種)

偏微分, 合成関数の微分, 商の微分を含む, 全体的な微分計算の練習問題として選びました。答えが 0 になることに驚くかもしれません。数値を代入してから微分するのではなく, 微分してから代入する順序に気をつけてください (代入したら微分できないはずですが)。

また, 対称性を使うと計算量が減りますので, そうしたところへのケアも指摘するといいいのではないかと思います。

なお, 0 になる理由は複素関数論の次の事実からわかります。すなわち, 偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

の一般解が, 任意の複素関数 $f(z)$ ないしその共役複素数のみの関数, あるいは線形和 $f(z) + g(\bar{z})$ の実部または虚数部になることです。本問でも,

$$\phi = \frac{1}{2} \ln z \bar{z} = \frac{1}{2} \ln z + \frac{1}{2} \ln \bar{z}$$

とすると, この形になります。

【No. 4】(H.25 地方上級)

分子の有理化を用いた極限の計算練習です。極限の問題は, 結局パターン別に覚えることとなります。例題でロピタルの定理が, また, 積分の章で区分求積法が出てきています

総合職では, 時々対称性を使う問題が出題されています

(式を因数分解するタイプはロピタルで対応できます)。このほか、部分分数展開を使うものも出題があり、そのため、まとめ部分にあげられています。

【No. 5】(H.16 国家Ⅱ種化学職)

接線の問題を1問入れておきました。接線の問題は国家総合職以外では少なく(国家総合職の出題例はNo.12に入れました)、地方上級などの場合、出題されても、多項式のため、微分するより重解条件などを考えた方が有利な場合がほとんどでした。

この問題は、一度計算そのものを復習しておいてもらいたいという意図から入れています。接線を微分で求める場合、接点の x 座標を文字で置かないといけません。これがまず1つ目のポイント。また、本問の関数が $y = e^{ex}$ と少々複雑になっていて、計算ミス誘っているのが2つ目のポイントです。

【No. 6】(H.23 国家Ⅱ種)

最大、最小の問題の練習問題として選びましたが、やや難しいかもしれません。解答では条件付きの最適化としては扱っていませんでしたが、文字の置き方によっては、条件付きの最適化になるかもしれません。いずれにしても、図形の問題ですので、まずは図を書くところからでしょう。

【No. 7】(H.19 国家Ⅱ種)

円筒の最適化の問題は、何度も同じものが出題されています。H.23 国家Ⅰ種、H.15 国家Ⅱ種、H.10 国家Ⅱ種があげられます。非常に易しい問題で、ラグランジュの未定乗数法を使うほどではないのですが、場合によっては、ラグランジュの未定乗数法の計算練習として使ってもよいとおもいます。

【No. 8】(H.12 国家Ⅱ種)

扇形の条件付き最適化の問題です。ここでradによる扇形の面積や弧の長さの公式の確認もできます。

この問題では、ラグランジュの未定乗数法の方が計算量が減らせます。この練習問題として選んであります。

【No. 9】(H.15 国家Ⅰ種)

式から微分するタイプの問題の練習問題です。国家Ⅰ種の問題ですが、例題の国家Ⅱ種よりは易しく、この問題であれば、距離を時間の関数として表して微分しても解くことができます。というよりもそちらが自然かもしれません。

ただし、例題を考えると、必ずしも時間の関数として表せるとは限らないこと、また、専門によっては、式からの微分が必須になることから、式からの微分による方法もケアしてもらいたいと考えています。

なお、機械力学の専門でもほぼ同一の出題があります。

【No. 10】(H.22 国家Ⅰ種)

式からの微分の問題の応用問題で、これはさすがにこの微分ができないと解きにくい問題です。連続した練習問題として意図して選びました。

【No. 11】(H.9 国家Ⅱ種)

前問と同じ趣旨で練習問題を掲載しました。似たテーマの問題が多いのですが、一つには盲点になりやすいパターンであり、自覚的に演習しないと伸びないであろう、とのことから重点的に用意したことがあります。また、この手の問題の重要性を意識していつも

実はこの手の問題では、地方上級でより難しい出題例があります

使えるようにしてもらいたい，ということもあります。

なお，H.21 国家Ⅰ種に類題がありますが，こちらの問題の方が国家Ⅰ種より難しくなっています。

【No. 12】(H.26 国家総合職)

直線の傾き $= \tan \theta$ であることを確認するためにこの問題を選びました。また，接線の問題の練習も兼ねています。解答にも書いてありますが，まず図を書くこと，そして， $\tan$ が傾きと関係あることがわかれば，自ずから正解が見えてくるでしょう。

なお，この問題は工学区分ですが，化学薬学区分では，問題文に図が描かれていました。