

第4章

積分

積分の出題の中心は積分計算そのものにある、との方針で問題を選んでいきます。計算そのものが重要となると、できる限り数多くの問題を解くことが大切になりますが、問題数のバランスの関係もあり、掲載できる問題数には限りがありました。そのため、できる限り色々なパターンの問題が入るように問題を選びました。また、「攻略問題集」ということで、今回は、できる限り「本試験で差がつくレベル」を意識しましたので、標準的な積分の問題よりはやや難しめの問題が、多く掲載されています。実際にはもう少し易しい問題も多いのですが、ここは他の受験生と差がつくように、と意識しています。

一般職、総合職、地方上級いずれも出題はほぼ確実にありますので、特に他の分野以上に計算の最後までしっかり意識して見ていく必要があります。

積分の計算の場合、微分と異なり、ある積分ができたとしても、他の積分ができるとは限りません。ですので、油断せずにより多くの問題を用意するといいかもしれません。

公式のまとめの中で、P.74 の上の方に各種の積分公式を用意しています。通常は、

$$\int_a^b (x-a)^n (x-b)^m dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (a-b)^{m+n+1}$$

とまとめるのかもしれませんが、事実上面積計算のみで使用するため、符号の問題を回避するために変形しておきました。そのため、 $a < b$ の条件がないと成立しませんので、注意してください。

この公式は単純な面積計算の他に、確率密度関数の計算でも割とよく使われます。

【例題 4-1】(H.24 地方上級)

非常にシンプルな出題ですが、地方上級ではちょうど差がつく程度の問題で、実力の目安になる問題だと思われるため、最初の問題に選びました。

解法は3つ用意していますが、見ていると、加法定理を使う学生が多く見られるようです。実際にどの解法がどの積分で使えるかわかりませんので、色々な手法を知っておくことも大切で、そのため、解法を多く選べるこの問題はよい演習になると思います。

また、置換積分は選ばれにくいようです。この問題では必要性が低いのですが、置換積分は割とよく出題されますので、この問題を題材に扱うことも可能かと思います。

【例題 4-2】(H.25 国家一般職)

典型的な部分積分の練習問題です。部分積分は、一般職、地方上級ではあまり出題されていないのが実際のところですが、そのため問題を選ぶことができず、やや他の問題よりも易しいのですが、この問題を選んでおきました。面積の問題にはなりますが、練習問題の No.5 の方がよい練習になると思うのですが、こちらはこちらで、積分区間で悩んだりする場合もあるようですので、余計なことを考えなくて言いように、こちらを例題にしました。

【例題 4-3】(H.23 国家 II 種農業土木職)

有名角に関する公式 $\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) = -\sin\theta$ を使うこともできますが、覚える、または導くのが大変で、直接加法定理を使った方が好かれるようです

面積の問題ではあるのですが、どちらかと言えば、やや難しい積分計算の問題としてここに入れました。最初に簡単な対数計算が必要となり、その次に積分となりますが、その一つ一つでつまづく可能性がありますので、注意してみてください。

この問題では置換積分がうまくいくのですが、いつでも通用するわけではないですし、実際には試行錯誤をすることになるのではないかと思います。そのために多くの手段をもつことが必要で、だからこそ、数多くの演習が大切になります。

なお、置換積分でもできると言及していますので、これについてもここでやってみます。

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{(\log x)^2}{x} dx &= [(\log x)^3]_1^e - \int_1^e 2(\log x)^2 \frac{1}{x} dx \\ &= 1 - 2 \int_1^e \frac{(\log x)^2}{x} dx\end{aligned}$$

これより、

$$\int_1^e \frac{(\log x)^2}{x} dx = \frac{1}{3}$$

となります。 $\int_1^e \frac{\log x}{x} dx$ も同様です。

【例題 4-4】(H.18 国家 II 種)

回転体の体積の計算の練習と共に、三角関数の 2 乗の積分の練習になっています。この積分は比較的良好に出題されますので、練習しておく必要があります。

【例題 4-5】(H.20 地方上級)

微分方程式の変数分離による解法は、国家試験ではあまり出題がありませんが、地方上級では出題がありますので、用意しておく必要があります（おそらく正答率は低いです）。変数分離は専門でも出題されることがあります（水理学、流体力学の水の流出時間の計算、土質力学の変水位透水試験など）が、専門の場合、答えを覚えておくのが普通かもしれません。

【例題 4-6】(H.25 地方上級)

区分求積の練習です。知らないと全く手も足も出ないと思われます。類題は H.22 国家 I 種で出題されています。

【No. 1】(H.22 国家 II 種)

絶対値のついた積分の計算練習です。同じく絶対値のついた積分としては、H.20 国家 I 種の問題などがあります。

【No. 2】(H.19 国家 II 種 農業土木職)

平方根の中を置換するという単純な問題ですが、見ているとなかなか置換積分に気づかないようです。数学が多少得意であっても、このような置換積分には注意が必要で、たとえば H.20 国家 I 種の確率密度関数の問題も、実際には積分が実行できずに困った受験生が少なくなかったようです。

【No. 3】(H.26 国家一般職)

基本的な重積分の計算練習です。同じレベルの問題は、過去には地方上級にも出題があります。いずれにしても、計算した経験があるかないかで差がつくレベルです。

【No. 4】(H.22 労基 B)

面積を題材とした計算問題を選びました。この問題を選んだ理由としては、対数の積分の練習であることと、図形の問題は図を描いて考えるという基本事項の注意喚起にあります。

【No. 5】(H.24 国家総合職)

部分積分の練習問題として選びました。計算には2回部分積分が必要となります。部分積分の出題頻度が低いことを考えても、この問題が正しく計算できるのであれば、部分積分に関しては十分と言えるかもしれません（対数関数は別）。

ただ、実際には $y = 0$ を解く段階でつまってしまう人も少なくありません。その場合、指数関数が0にならないことの確認もしてください。

【No. 6】(H.15 国家Ⅱ種)

三角関数の積分の練習問題です。図形から式中の定数を求める必要があるため、やや作業量が多くなっていますが、余裕を持って計算したい問題です。

【No. 7】(H.19 国家Ⅱ種)

曲線の長さを求める問題の練習問題です。曲線の長さを求める問題は、労基を除くと、地方上級、国家総合職では知る限り出題はなく、H.17, 19, 20の国家Ⅱ種でのみ出題があります。つまり、一時期に集中して出題され、それ以外の期間には出題がない、というのが特徴です。今後も出ないかというわからないのですが、いずれにしても一度経験しておけば十分かと思います。

なお、本文中に公式が書かれていますが、これは出題された3回とも書かれていました。

この計算をするときには、多くの場合、何らかの方法で平方根が外れるか、あるいは外さずに積分できる形になるということを意識する必要があります。

【No. 8】(H.24 国家一般職)

回転体の体積の計算練習です。ここでは多項式の問題を選びました。敢えて公式を使っていますが、このくらいであれば展開しても速いでしょう。

なお、2乗の積分については、例題4-3に対数関数が、例題4-4に三角関数があり、特に後者は重要です。

【No. 9】(H.21 国家Ⅰ種)

前問と同じく回転体の体積の公式ですが、本問では対称性があることと、 y^2 について解くことができることが特徴です。ただ、球の計算自体が有名問題で、その有名問題を紹介した、という意味合いが強いかもしれません。

なお、H.16 国家Ⅱ種にほぼ同一の問題があります。

【No. 10】(H.23 国家Ⅱ種)

接線及び回転体の体積に関する問題で、他の問題と比べるとややレベルの高い問題です。国家総合職以外では、接線の問題は出題数が少ないのですが、何回かは計算方法に触れておきたいという意味もあり、面積、体積計算の最後となるこの位置に入れておきました。

2つの図形の間に挟まれた部分の回転体の計算ですので、引いてから2乗しないように、つまり、

$$\int_0^1 (e^x - ex)^2 dx$$

と計算しないように注意喚起してください。

【No. 11】(H.23 地方上級)

例題 4-5 に対応した練習問題です。

【No. 12】(H.26 国家総合職)

この章の発展問題として入れておきました。また，速度と位置の関係，部分積分の計算が入ってきます。

まず，距離が最大となるときの P と Q の速さが同じになることに気づかないといけません，このことは H.21 国家 I 種のエネルギー保存の問題でも使われています。