

第 1 章

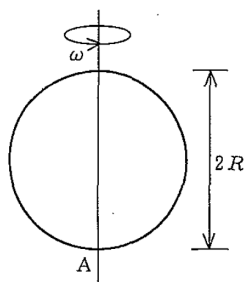
平成 13 年 No.116 水理学

1.1 問題：相対的静止

問題

図のような半径 R の球形容器に水を満し、球の中心を通る鉛直軸を中心として一定の角速度 ω で回転させた。このとき、この容器の壁面で圧力が最大になる点の、容器下端 A 点からの鉛直距離はどれか。

ただし、重力加速度を g とする。



1. $R - \frac{g}{\omega^2}$ 2. $R - \frac{2g}{\omega^2}$ 3. $R \left(1 - e^{-\frac{g}{\omega^2}} \right)$
 4. $Re^{-\frac{g}{\omega^2}}$ 5. $R \left(1 - \frac{\omega^2}{g} R \right)$

1.2 平成 13 年 制度改正

今、国家総合職の工学系は、細かく区分されている国家一般職と違い、「工学」という 1 つの区分にまとめられています。これは、以前の制度である国家 I 種試験における「理工 I」の区分を引き継いだものですが、その理工 I という制度も最初はありませんでした。それ以前は、今の国家一般職と同じように技術系の区分は細かく分かれていたのです。それが「理工 I」に再編されたのがこの平成 13 年でした。

この平成 13 年の試験は、何もかも手探りのように見えます。たとえば、土木の科目割りがこの年だけ他の年と異なります。今では、「構造力学（土木）、材料、施工」「水理学、土質力学」と分かれています。この年は、「構造力学（土木）、土質力学」「水理学、河川、施工」となっています。コンクリートを考えると、構造は材料と相性がいいですし、平成 13 年は港湾の出題がありませんね。

それは、問題の難易度の点でもそうでした。実は平成 12 年までは、どの職種でも専門試験は全問必須でした。それが突然広い選択問題制に変わりました。ほとんどの問題では、平成 13 年になり、問題は多少易しくなりました。しかし、土木は別でした。特に、構造力学、水理学を中心に、試験委員が替わったこともあるのですが、「解けるもの

とはいえ、まだまだ難しい問題が多く、平成 15 年くらいまで易化傾向が続きました

他 H.8 も出題があったはずですが、このときの出題は標準的でした。

なら解いてみる」と言わんばかりの力作が揃うことになったのです。

さて、そうした中でのこの問題です。この年の水理学は例年通り3題の出題でした。水理学は機械系の流体力学と比べて難しい問題ばかり出題されますが、この平成13年もそうでした。では、問題を見ていきましょう。

1.3 相対的な静止

「相対的な静止」という分野からの出題です。この分野からの水理学での出題は、H.10, H.11, そしてこの H.13 に H.16, H.21 と続きます。さらに工学の基礎でも以前は出題されたため、過去にはかなり頻出テーマだったと言えます。H.11 までの出題は、難易度も標準的でしたが、この H.13 からの3回はいずれもかなりの難問になって、さらに出題頻度も下がりました。

「相対的静止」というのは、容器に水を入れ、容器を加速度運動させたときに、容器内の水面の形状が変化をする現象です。出題のパターンは主に3つあります。

1. 容器を水平方向に等加速度運動させるもの
2. 容器を角度 θ の坂で滑らせるもの、あるいは引っ張るもの
3. 容器を角速度 ω で等速回転させるもの

今回は3番目の問題に当たります。それでは解いていきましょう。

1.4 答えを出すだけなら...

まじめな解答を出す前に、本試験ならどうすべきでしょう。この問題を解くのは簡単ではなさそうです。そもそもあまり見かけない問題ですしね。ところが、選択肢がすべて文字であることを考えれば、一つ正解を見つける方法が思い浮かびますね。それは、特殊な数値を代入するということです。今回はどうでしょう。そう、 $\omega = 0$ としてしまえば簡単そうです。 $\omega = 0$ ということは回転していないということです。回転していないのであれば、それは相対的静止ではなく、ただの静水圧です。そして静水圧なら深いところが大きいですから、圧力が最大となるのは A 点そのもの、つまり 0 となります。

選択肢のほとんどが ω が分母にきているため論外です。しかし、 $e^{-\infty} = 0$ であることを考えれば1つだけ残ります。肢4ですね。これが正解と考えられますので、これをマークした人がかなりいたのではないかとおもいます。

実は、H.13 は問題の持ち帰りができませんでした。もし人事院に情報公開請求して、H.13 の理工 I と H.14 の理工 I のファイルを入手した人は、表紙をよく読んでみましょう。H.13 では、持ち帰りが認められないことが書かれています。一方、H.14 では持ち帰りが認められています。

今となってはよく覚えていないのですが、少なくとも、今のように試験翌日に正解番号を公表することがありませんでした。情報公開法自体は H.13.4 月の施行ですので、おそらく試験の数ヶ月後に問題が公開されたのではないかと思います。僕は、人事院に情報公開請求をした「初めて」の人みたいですが（そう受付で言われました）、たしかこれは国家2種の直前だったと覚えています。

いずれにしても、正解番号はすぐにはわからなかったのです。そして公開された正解番号は「1」です。これは何かおかしいですね。

これがこの問題を取り上げた理由です。

1.5 解答への第一歩

では、この問題を解いていきましょう。この問題で求めるのは「圧力」です。しかし、静水圧ではない以上圧力を求める公式は普通は知らないのではないかと思います。そう

これは後で取り上げますが、近年頻度が低いので公式を覚える必要はあまりないでしょう

だとすると、考える手がかりは何かないでしょうか。

通常、問題を考える上で最も大切なことは、なにを求めるのかを読み取ることです。その上で、

1. 関係ある公式をまとめる
2. 類似した問題を考える（共通点、相違点など）

というのが考える手がかりです。

圧力の公式を知らないとしても、容器を回転させるときの水面を求める問題は有名です。これを考えてみましょう。水面はどんなところにできるのでしょうか。特に水面と水圧の関係が大切です。水面での圧力と言え、（ゲージ圧で）0 になります。言い換えれば、圧力が 0 で一定の面が水面ということです。これに気付けば先が見えます。つまり、水面に沿って圧力が等しいのではないかと、ということがわかりますね。これは正しい推論です。どの深さに水面ができるかは水の量によって変わりますが、いずれにしても、水面を沢山書けば、それらは等水圧面になるということです。つまり、この水面を書いていけば、圧力が最大となる点も分かります。

そこで、有名問題の「回転の場合の水面形の式」を計算していきましょう。

1.6 等速円運動の水面

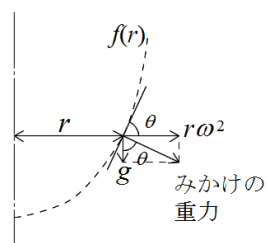
水面はどのようにして決まるのでしょうか。水面の「水平」とはどの方向か考えてみると、それは重力に垂直な方向ですね。回転が加わると、重力に加え遠心力が加わりますが、遠心力も直接質量に加わる力です。そこで、重力も遠心力も区別できない力という意味で、合力を出して見かけの重力とします。

たとえば、いまみなさんが感じている重力にも「地球の万有引力」と「自転による遠心力」が両方入っていますが、これを区別できる人はいませんよね。その意味で、この「見かけの重力」は本当の重力なのです。ということは、水面ができる規則は、

水面は見かけの重力に直交する

でよさそうですね。

では回転軸からの半径を r として、単位質量当たりの力を描いてみましょう。



そして、見かけの重力は水面に直交します。曲線（曲面）に垂直になるということは接線（接平面）に垂直になるということですから、ずのように接平面の傾きを θ とすると、

$$\tan \theta = \frac{r\omega^2}{g}$$

となります。ところで、 $\tan \theta$ は接線の傾きですが、接線の傾きは $f'(r)$ のことから、

$$f'(r) = \frac{r\omega^2}{g} \quad \therefore f(r) = \frac{r^2\omega^2}{2g} + C$$

となります。

定数 C は水の量によって変わりますが、ここではこの曲面に沿って圧力が等しいということが大切です。

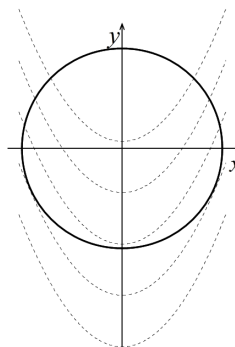
ここまでは有名問題として用意しておくべきことですね。

この問題の2年前に出題がありましたね

ここは実際には、試験前に用意して覚えておく部分です

1.7 正解を求める

さて、元の問題に戻りましょう。先ほど求めた曲線に沿って圧力が同じなのですから「等圧線」を描いてみれば圧力の大小はわかります。描いてみましょう。



こうしてみると状況が掴みやすいかもしれません。一番圧力が高いところとは、つまり、最も下にある放物線に接しているところですね。

これは円と放物線が接すると言う話ですから、座標系をおいて数学的に計算しましょう。図のように座標系を決めると、円の方程式は、

$$x^2 + y^2 = R^2$$

放物線の式は、

$$y = \frac{x^2 \omega^2}{2g} + C$$

です。これを

$$x^2 = \frac{2g}{\omega^2}(y - C)$$

として円の式に代入しましょう。

$$x^2 + y^2 - R^2 = y^2 + \frac{2g}{\omega^2}y - \frac{2g}{\omega^2}C - R^2 = \left(y + \frac{g}{\omega^2}\right)^2 - \frac{g^2}{\omega^4} - \frac{2g}{\omega^2}C - R^2 = 0$$

これが重解を持つ場合は、

$$-\frac{g^2}{\omega^4} - \frac{2g}{\omega^2}C - R^2 = 0$$

となるときで、このとき、

$$y = -\frac{g}{\omega^2}$$

となります。これで答えが出てきました。A点からの高さに直せば、

$$R - \frac{g}{\omega^2}$$

となって、確かに正解の1が出てきました。この解法を取る限り、指数関数が出てくる余地はなさそうですね。

1.8 何がいけないのか

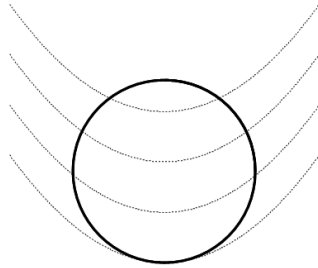
そうはいっても、 $\omega = 0$ のときに0とならないのは納得のいかないところです。どうしてそうならないのでしょうか。

実際これは0にならなければいけないはずで、そうだとすると上の解答はどこかに欠陥があるはずで。

上の解答には確かに欠陥があります。問題は、接点の y 座標です。円との接点なので、 $y \geq -R$ でなければいけないはずですが、この条件を代入すると、

$$-\frac{g}{\omega^2} \geq -R \quad \therefore \omega \geq \sqrt{\frac{g}{R}}$$

つまり、この範囲外では、この接点は矛盾が起きることになります。このとき何が起きているのでしょうか。この境界となる $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$ のとき、接点は $y = -R$ です。それより ω が小さくなるとどうなるのでしょうか。それは次の図のようになります。



つまり、A 点で圧力は最大となっています。これ以上角速度が小さくなれば、徐々に放物線（面）は水平線（面）に近づいていきますから、これより角速度が小さくなる場合は、圧力は A が最大となります。

結局答えは次のようになるのです。

$$\begin{cases} R - \frac{g}{\omega^2} & (\omega \geq \sqrt{\frac{g}{R}}) \\ 0 & (\omega < \sqrt{\frac{g}{R}}) \end{cases}$$

本問では、角速度で場合分けがなされていません。ですので、本問は正解がなく「没問」にすべきということになります。

しかし、最初にも書いたとおり、この年は、すぐには正解が公表されませんでした。そのため、結局没問の扱いはされませんでした。正解を出すことは難しい上、 $\omega \rightarrow 0$ を代入して答えを絞った人が少なからずいたでしょうから、影響を受けた人は多かったと思います。

1.9 補足

そうはいつても、重解で答えが出てこないことに納得がいかない人がいるかもしれません。簡単に言えば、「多項式のような単純な場合以外では、重解だけで接する条件は表せない」ということです。

ちょっと設定が異なりますが、こう考えればどうでしょう。たとえば、方程式

$$y^2 + 2y = y(y + 2) = 0$$

は重解をもちません。しかし、 $y = x^2$ とおけば、

$$x^4 + 2x^2 = x^2(x^2 + 2) = 0$$

は、 $x = 0$ が重解となっています。今回は同じ事情と言ってよいでしょう。

しかし、このようなことに気づくためにはどうすればよいのでしょうか。それは一度このような問題を解いたことがあるかどうかが大きいです。「演習は裏切らない」ということです。