

第3章

国家Ⅰ種 平成16年 No.62 構造力学 (土木)

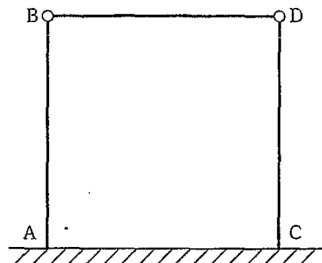
3.1 問題：温度応力，座屈，不静定力法

問題

図のように，点 A と点 C で固定支持された 2 本の片持梁 AB，CD の先端に，両端をピンで支持された梁 BD がある。いま，梁 BD のみが一様に温度上昇し，オイラー座屈が生じた。このとき，温度上昇は次のどれで表されるか。

ただし，3 本の梁の断面積は A ，ヤング係数は E ，断面 2 次モーメントは I ，線膨張係数は α とすべて等しく長さ方向に一様であり，長さは l である。

なお，長さ l ，曲げ剛性 EI を有する片持梁の先端に，集中荷重 P が作用するときの梁先端のたわみは $\frac{Pl^3}{3EI}$ となる。



- | | | |
|--|--|---|
| 1. $\frac{\pi^2 I}{A\alpha l^2} + \frac{\pi^2}{2\alpha}$ | 2. $\frac{\pi^2 I}{A\alpha l^2} + \frac{2\pi^2}{3\alpha}$ | 3. $\frac{\pi^2 I}{2A\alpha l^2} + \frac{\pi^2}{2\alpha}$ |
| 4. $\frac{\pi^2 I}{2A\alpha l^2} + \frac{2\pi^2}{3\alpha}$ | 5. $\frac{\pi^2 I}{3A\alpha l^2} + \frac{2\pi^2}{3\alpha}$ | |

3.2 問題の難易度

ここまで土木ばかりを取り上げています。さらに，ここまでは没問ばかりを取り上げてきていますので，「土木の作問の質が悪い」と言いたいのでは？と思われるかもしれませんが，そうは思いません。確かに，前章の土質力学は，明らかな作問の手抜きなのですが，第1章の水理学，そしてこの問題と，非常に意欲的な作問と言えるかと思います。まず，設定が独自で目新しいため，受験生は，自分の持っている知識を活用して，その場で考える「思考能力」が問われます。さらに，答えまでの過程が遠いため，途中の計算などの数理的能力も問われることになります。その意味で，非常に意欲的な問題だとは思います。意欲的だからこそ，1章のような失敗もあるわけです。

しかし，解答者の側から見ればどうなのでしょう。この構造力学は，他に「機械系（材

料力学)」「建築系」でも出題があり、そのため、同時にこれらの科目を複数選択することが不可能です。そこでこの3つの科目を比較してみると、土木系の問題が飛び抜けて難しすぎるように思われます。そうすると、土木系の学生には当然に不利になってしまいますね。

この問題もその中の一つです。「たわみ」「温度応力」「座屈」と3つの分野にまたがった総合的な問題と言えるのですが、一方で、建築系は似たようなラーメン構造物で、典型的な「静定ラーメン」のたわみを出題しています。これはどうみても建築系の問題の方が易しいと言えます。

こうになってしまう一つの理由は、土木系のみ、構造力学では3問しか出題されない、ということがあるのでしょう。他は5問出題がありますので、結果的に、少ない出題で実力を測ろうとして、分野横断的になると、どうしても難易度が上がってしまいます。また、試験委員の熱意も、土木がずば抜けて高いような気がしますね。

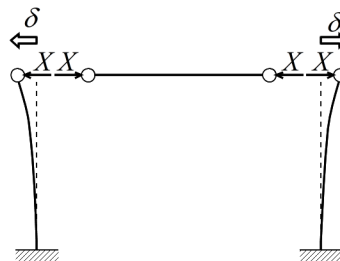
ですので、合格したければ、土木系の学生であっても、必ず「建築系」「機械系」も準備すべきだ、と僕は常々思っていますし、言っています。明らかな格差ですからね。

と言うわけでこの問題です。この問題は、表だって没問にはなっていませんし、答えはきちんと出てきます。では、何が問題なのでしょう。

まずは正解への道筋をたどってみましょう。

3.3 解答－不静定力法

さて、では解いてみましょう。問題文でも示唆されていますが、このような場合、単純な構造物に分割することが大切です。そこで、次のように、分割して変形した様子を図に表しましょう。これを描くことが解くための最大のポイントとなります。



図にもありますが、もともと3つの構造は接続していました。接続していた、ということは力学的には力が伝わっているということです。ですので、ここに伝わる力も図のように文字でおいて図示しましょう。繰り返しますが、ここまで描けることがポイントですよ。

すると、左右の柱は対称的で、しかも片持ち梁を縦にした形、と見ることができます。ですので、ここで問題文中のヒントが使えますね。

したがって、

$$\delta = \frac{Xl^3}{3EI}$$

となります。

つまり左右の間隔が 2δ 広がっていますので、これが中央の棒の伸びになるはず。棒はこの柱をつないでいるのですからね。

ところで、棒は温度上昇 ΔT によって $\alpha l \Delta T$ だけ伸びますが、一方で、軸力 X によって、 $\frac{Xl}{EA}$ だけ縮みます。したがって、全体としての伸びは、その差をとればよいので、次の式が成り立ちます。

$$2\delta = \frac{2Xl^3}{3EI} = \alpha l \Delta T - \frac{Xl}{EA}$$

とはいえ、この図が描けるレベルの人は、この公式も当然知っているでしょうから、「片持ち梁と見なさい」ということそのものがヒントなのでしょうね

力の方向は、作用反作用の法則からわかります。

一方、この荷重は座屈荷重とも等しかったはずですが、したがって、柱の支持条件が両端ピンであることに気をつけて、

$$X = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

となります。

これを代入してみると、

$$\frac{2\pi^2 l}{3} = \alpha l \Delta T - \frac{\pi^2 I}{Al}$$

ここからすぐに次の正解が出てきます。

$$\Delta T = \frac{\pi^2 I}{A\alpha l^2} + \frac{2\pi^2}{3\alpha}$$

正解は肢 2 となります。

最初からこれを使うこともできました。

3.4 問題の現実性

ここまででは、なぜこの問題を取り上げたのかわかりませんよね。なるほど、確かに機械や建築の問題よりは難しいのかもしれませんが、決して難問とまでは言えません。これより難しい問題はまだまだ出題されているのです。

ところで、視点を変えてみましょう。座屈を勉強するときに、こんな疑問点は持ちませんでしたか？

「座屈荷重の公式に長さ l があるけれど、棒は圧縮力で縮むはずだ。だとしたら、その圧縮量を考慮しなくてよいのだろうか」

なるほど、確かめてみましょう。座屈荷重は次の大きさでした。

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

一方で、圧縮量 δ は次の式で表されます。

$$\delta = \frac{Pl}{EA}$$

ここに代入すると、次のようになります。

$$\delta = \frac{\pi^2 I}{Al} \quad \therefore \frac{\delta}{l} = \frac{\pi^2 I}{Al^2}$$

もし、長方形断面（幅 b 、高さ h ）であれば、

$$\frac{\delta}{l} = \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{h}{l} \right)^2$$

もともと座屈する柱なのですから、十分に細長いはずですが、したがって、 $\frac{h}{l}$ も十分に小さいはずですが、つまり、圧縮は無視してよいのです。むしろ、記述の問題でも、これを考慮するのは「話がわかっていない」として、減点対象になるかもしれませんね。

いずれにしろ、これは考える必要はないのです。

では、圧縮量についてはいいとして、温度はどうなのでしょう。簡単のため、正解の第 1 項を無視して、

$$\Delta = \frac{2\pi^2}{3\alpha}$$

として計算してみます。

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

座屈荷重の公式では、柱の長さは 2 乗されるのですから、なおさら無視できます

コンクリートと鉄の線膨張係数が等しいことは、鉄筋コンクリートとして2つを組み合わせる大きな理由になっています。

ついでにそれは「鉛」ですから、融点も低くなります。そもそも線膨張係数が大きくなるのは、溶けやすいものと言ってよいでしょう

この柱の材質について何も描かれていませんが、コンクリート、または鉄であれば、だいたい線膨張係数は、 $\alpha = 1.0 \times 10^{-5}$ 程度となります。これを代入してみると、 $\Delta \doteq 7 \times 10^5 = 70000[\text{K}]$ となります。

雲行きが怪しくなってきましたね。実際には第1項を無視していますので、もっと温度は高いはず。それにしても、70000度というのは、地球上ではあり得ないどころか、あらゆる金属などを余裕で溶かしてしまう温度です。

とはいえ、問題文に材料が何かは書かれていません。そこで、考え得る最大の(固体の)線膨張係数の物質を考えてみるとどうなのでしょう。金属では、せいぜいこの3倍というところ。それでは、温度も $\frac{1}{3}$ にしかありません。ゴムだとうまく $1.0 \times 10^{-4} [1/\text{K}]$ 程度のオーダーになりますので、温度が7000度程度まで下がってきますが、それにしても太陽の表面温度を凌駕します。

つまり、実はこの状況は、全くあり得ないということなのです。

しかし、こういう人もいるかもしれませんね。

「問題文には、材料についても何も描かれていないのだから、架空の材料でも構わないはずだ」

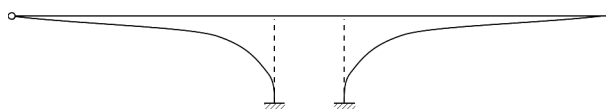
確かに、たとえば剛体は存在しないのですが、剛体に近い物体は存在します。あるいは、剛体として扱って差し支えない状況、というのはあります。工学として、全く論外な結論の問題、というのもどうかとは思いますが、それでもこの主張を認めることもできるでしょう。

しかし、そもそも、なぜこのような高温になったのか、そちらの方が気になります。

そこで、左右の梁のたわみ δ を求めてみましょう。

$$\delta = \frac{Xl^3}{3EI} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \times \frac{l^3}{3EI} = \frac{\pi^2}{3} l \doteq 3.3l$$

ここへ来て、実はこれが、「材料」の問題ではないことが分かります。この梁は、長さの3倍以上もたわんでいるのですから、すでにたわみの前提である微小変形理論が成立し得ないことがわかります。棒も、この場合、元の長さの7倍近くも伸びていることが分かります。だからこその高温だったのですね。この比率で変形した様子を描くと、次のようになります。



要するに、座屈と梁のたわみを一緒に出してしまうと、うまく作らない限り、相当に無理な設定になってしまうということなのでしょう。

とはいえ、この問題を没問とするのも行き過ぎなのかもしれません。パズルとしては答えは存在していますので。それに、もしかして、このことを見据えて、問題文に敢えてたわみの公式が入っているのかもしれませんね。

「微小変形では無理があることはわかっているけれど、今回はこれを使ってくれ」と。