

## 第 10 章

# 地方上級 平成 13 年 工学の基礎

### 10.1 問題：微分

#### 問題

$x, y$  についての二次形式,  $Ax^2 + By^2 = C$  ( $A + B = C$ ,  $A, B, C$  はすべて 0 ではない定数) において,  $x = 1, y = 1$  における  $y$  の  $x$  による微分係数はどれか。

1.  $\frac{A}{B}$
2.  $-\frac{A}{B}$
3.  $\frac{2A}{B}$
4.  $\frac{A}{\sqrt{B(C-A)}}$
5.  $-\frac{A}{\sqrt{B(C-A)}}$

### 10.2 まじめに微分してみると

この問題のシンプルな解法は次のようになるでしょう。 $\frac{dy}{dx}$  を求めよ, と言っているのですから, まずは  $y$  について解きます。

$$y = \sqrt{\frac{C - Ax^2}{B}}$$

ですね。これを  $x$  で微分すれば, 答えは出てきそうです。この微分は大変そうですが, 微分すると決めたのであれば, 微分するしかありません。まずは次のようにしておきましょう。

$$y = \frac{(C - Ax^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{B}}$$

この上で, 合成関数の微分公式を使っていきます。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}(C - Ax^2)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{B}} (C - Ax^2)' = \frac{\frac{1}{2}(C - Ax^2)^{-\frac{1}{2}} \times (-2Ax)}{\sqrt{B}} = \frac{-Ax}{\sqrt{B(C - Ax^2)}}$$

ここに  $x = 1$  を代入すると,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-A}{\sqrt{B(C - A)}}$$

となります。選択肢 5 にぴったりの形がありますね。

もう少し面白い方法があるのだろうけれど, これで答えが出てきたのだから, これでもいいか, と思った人もいるかもしれませんね。

一つの問題を解いたときに大切なことは, その問題が解けただけではなく, そこから何が学べるのかです。そのため, 問題を選ぶとき, その問題からどのようなストーリーが描けるのか, これを意識して選ぶことがあります。

うまい解き方，というのは思いつくこともあれば思いつかないときもあります。ある日たまたま調子が悪く，うまい方法を思いつかなかったとしても，計算力があれば押し切ることができます。そのための計算力とは，微分の場合，本問のように，合成関数の微分だとか無理関数の微分を正しく計算することだ，この問題からはこのように教訓を得ることができるでしょう。

しかし，この問題で最も重要なところは，肢5が不正解だということなのです。

### 10.3 何が間違いののか

では，上の計算のどこが間違いのなのでしょう。まず，すぐに思いつくことは， $y$ について解いたときに，無頓着に符号を考えたことです。

$$y = \pm \sqrt{\frac{C - Ax^2}{B}}$$

とすべきでしょう。

しかし，実はこの点は本問ではあまり関係がありません。 $y = 1$ で考えるととなっているため，符号は結局「+」だけをとることになるからです。

では何がいけないのでしょうか。よく問題文を読んでみてください。 $A, B, C$ が正だとはどこにも書かれていません。そして，公式

$$\sqrt{\frac{B}{A}} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}}$$

は， $A, B$ が正の場合しか成り立ちません（ $B = 0$ でもよいですが）。実は，これが間違っているのです。

では正解は何なのでしょう。肢5に $A + B = C$ の条件を加味してみましょう。

$$\frac{-A}{\sqrt{B(C-A)}} = \frac{-A}{\sqrt{B^2}} = \frac{-A}{B}$$

となります。

肢2と一致しますね。では，正解複数で没問でしょうか。いや，違います。上の変形は正しくありません。 $B$ が負の場合も考慮するなら次のようになります。

$$\frac{-A}{\sqrt{B^2}} = \frac{-A}{|B|}$$

です。肢2とは一致しません。そして，正解は肢2なのです。

### 10.4 正解はどう導かれるのか

一方で，ここまでの方針が遠回りでイライラして見ていた人もいるでしょう。

正解を短時間で導くためには次のようにします。もとの式

$$Ax^2 + By^2 = C$$

を $x$ で微分して，

$$2Ax + 2By \frac{dy}{dx} = 0$$

これを解いて，

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Ax}{By} = -\frac{A}{B}$$

あっさり終わってしまいましたね。

ここでは示ませんが，興味のある人は，この点も踏まえて，上の方針で正しく微分してみるとよいでしょう。仮に正しく微分できたとしても，条件に気づく前に，肢5に引っかかってしまう可能性はありますね

最初からこのような方針で解けば、何も引っかからないわけです。だから、この問題は  $y$  について解くのではなく、与えられた式から直接微分するようにしなさい。これがこの問題から得られる教訓であることに間違いありません。

でも、本当にそれだけが言いたいことでしょうか。

## 10.5 言いたいこととは

では、なぜこの問題を解説するのに、最初のような遠回りな解法を最初に用意したのでしょうか。しかも、この問題ではそれは不正解に誘導されてしまいます。意図が見えないかもしれませんが、それはこういうことです。

なるほど、このような「正解」へ辿りついた人もいるかもしれませんが、でも、ここで強調したいことは、「不正解」の選択肢がちゃんと用意されている、ということなのです。

国家一般職の過去問は公開されています。そしてその平均点は5割を超えるところにあります。しかし、地方上級の平均点は4割程度です。その差はどこにあるのか。その答えの一つがここにあるのです。国家一般職では、仮に引っかけのような問題が出されても、引っかけ選択肢が存在しないことが多く、その意味で易しくなっています。しかし、地方上級は、差がつくように問題を作問していて、ちゃんと引っかけに来る。この問題では引っかからなかったかもしれないけれど、引っかけのパターンはこれ以外にも数多くある。そんな中、どのようなパターンに対して何を用意していくのか、そこが問題なんだと。

そのためには、きちんと過去問を知り、それをふまえて容易をする必要がある。市販されている本には、問題と正解があるが、なぜその解法をその問題で選んだのか、そこが曖昧なものが多く、ただ単に「正解」を理解しただけで満足している受験生が多い。だから、まずは正解を理解するにしても、なぜその解法なのかというところまで踏み込んで対策をすれば、精度の高い対策になり、同じ実力の受験生を出し抜くこともできるよ、と。

もちろん、僕はそういうことを考えている、と付け加えておいて、大体与えられた時間(20分程度でしょうか)を終えることになります。

そう。これは僕が以前ガイダンスで利用していた問題でした。

## 10.6 実際の解答状況

僕はこの問題を何回か使用していますので、大体どの程度のできなのかは予想できます。この問題をガイダンスで利用する一つの理由として、問題の意味がわかりやすい、ということがあります。ガイダンスにおいては、まだ公務員試験に興味がありません、勉強もほとんどしていない人が混ざってきます。そんな中、複雑な問題を出しては、意味すら理解されずに、その後の講義に支障が出ます。今回は、「微分する」ことが目標ですから、理系が相手であれば、その心配はありません。

しかし、一方で、高校範囲とはいえ複雑な微分だけに、最後まで微分できる人は、それだけで割合的には限られます。感覚的に半分くらいでしょうか。そして、残りの半分も大体不正解に誘導されます(最初に演習時間を設けていて、様子を見ているその際は、僕の方からは不正解へ誘導はしません)。

ただ、この問題のレベルだと、公務員試験対策をしていなくてもちゃんと正解へ辿りつく人が一定割合でいます。しかし、多くの場合、ガイダンスにおいては、まあ数名程度か、多くても十数名とか、その辺りという感覚です。もちろんできた人に対しては「なかなかやるね」と言いたい一方で、「本当にいつでも同じようにできる? 油断して微分などしたら間違えてしまうことになるんだよ」「この引っかけは大丈夫だったかもしれないけれど、他のものについても見抜くことができる?」と問いかけているのです。地方上級には地方上級の出題の癖がある、仮に今回容易に解けた人でも、その点に注意してもらいたい、というのがその場での結論でした。

実際には「当時」は6割近くありました

具体例として、H.24 国家一般職工学系 No.18 をあげておきます

多くは物理の問題を使用するのですが、物理の使用がためられるときにこちらを使用しました

速度に関する問題、接線に関する問題などで有効に使われます

これは上で出てきた H.22 国家 I 種の類題にもなります

この問題は、先にも言ったとおり、実際に何回かガイダンスに使用しました。あまり終わった後のアンケートは見ないのですが、あるときまたアンケートを見ていたら、このような感じである 1 人に酷評されていました。

「こんな簡単でわざとらしい些末な問題を、わざわざ遠回りにして解くのは講師の力量に大いに疑問がある。このような講師がいるようでは、講座全体が疑問だ」

そもそも簡単か、という話ですが、この人はたまたまこの問題は解けたのでしょうか。実は、問題の難易についてもアンケートされており、このとき 100 人以上の回答があったのですが、半分は「難しい」、残り半分は「適切」であり、「易しい」はこの人を含めて 2 名しかいませんでした。その点で、僕の見立ての方が、当たり前ですが正しいわけです。そして、多くの人が、単純に微分して、そして微分計算を誤ったか、間違った選択肢に行き着いたことも、僕は何も言わなかったのですが、その通りになったと思います。その点では狙い通りのわけです。

わざとらしい、という点については、なるほど認めるところもあります。そもそも 20 分程度で完結しなければいけない場です。20 分程度で、「何かをやり遂げた」と思わせるような問題を選ばないといけないわけです。そのような意味で、「面白い」問題でないと選べません。ガイダンスでの 1 問ですから、当然それなりの問題を選ばない方がおかしいでしょう。その点について、理解してもらえないのは、むしろ不思議な気がします。たとえば、単純な計算練習のみで終わったら、きっと何も残らないに決まっています。

## 10.7 些末なのか

ところで「わざとらしい」ということに関して、この問題は些末なのでしょうか。

たしかに「引っかけ」という点ばかりを強調して 20 分を終えたのは事実です。しかし、公務員試験対策である以上、些末かどうかは、それが物事の本質の問題かどうか、というよりは、公務員試験に出るかでないかで決まるはずです。したがって、些末かどうかを知るためには、公務員試験の傾向を知る必要があるはずです。

その点においては、当然、僕の方に分があります。もちろん、ガイダンスなどパフォーマンスであり、そのための問題を選んでいることは確かです。しかし、全く珍しい問題を本当に選んでいたのでしょうか？

工学の基礎、ということ言えば、近年の類題は国家総合職（I 種）に集中しています。たとえば H.22 ではこの方法を知らないで解きにくい問題が出題されていますし、同様に計算が簡単になる問題は、何度も出題されています。これについては、「攻略問題集」などにも使われていますので、省略しましょう。

しかし、それだけではありません。たとえば、次の問題を見てみましょう。

### 問題

構造力学、材料力学において、曲げによる曲率  $\phi$  とたわみ  $w$  の関係を示す微分方程式を表せ（H.26 国家総合職記述）。

曲率  $\phi$  は曲率半径  $r$  の逆数です。そこで、たわみの式を  $(x-a)^2 + (w-b)^2 = r^2$  と局所的に近似できるものと仮定して、ここから  $a$ ,  $b$  を消去します。

まず式を  $x$  で微分して、

$$2(x-a) + 2(w-b)w' = 0$$

$$\therefore (x-a) + (w-b)w' = 0$$

さらに  $x$  で微分して、

$$1 + (w')^2 + (w-b)w'' = 0$$

後の式から、

$$w-b = -\frac{1+(w')^2}{w''}$$

さらに、1 回微分したときの式に代入して、

$$x - a = \frac{(1 + (w')^2)w'}{w''}$$

これらを  $(x - a)^2 + (w - b)^2 = r^2$  に代入すれば、

$$r^2 = \frac{(1 + (w')^2)^3}{(w'')^2}$$

と求まります。一般に曲げモーメントは、下に凸になる向きを正とするのに対し、たわみ  $w$  は下を正に取ることから、符号は「マイナス」を取ることにすれば、

$$r = -\frac{(1 + (w')^2)^{\frac{3}{2}}}{w''}$$

曲率なら、

$$\phi = -\frac{w''}{(1 + (w')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

となります。数学的な厳密性はさておき、材料、構造力学としてはこれで正しい結果が求まりますので、十分ではないでしょうか。

ここではこの微分は有効に使われています。その他、機械系では、普通に機械力学で使いますし、化学系、機械系では、ファンデルワールスの式の臨界温度の計算に有効に使うことができます。また、水理学、流体力学でも、計算を容易にするために、たとえば、水の流出や開水路の簡単な解析に、土質力学でも、圧密や透水試験の計算に使うことができます。

よくよく考えてみれば、数学、特に微分というのは工学に取ってみれば問題を扱うための一般的な道具なのですから、使い道は様々出てくるのは当然かもしれません。

ここで最初の問題に戻ります。なるほど、この問題は一定割合で正解が出てくるレベルのもので。この問題の解説を見れば、この問題は解けるでしょう。あるいは、最初から「解けた」と言うかもしれません。

しかし、その道具を本当に使いこなせているのでしょうか。使っている様子を見て「自分もできたはず」というのは簡単なことです。しかし、使いこなすためには「いつでも使える」ような準備が必要なのです。今回は数学で、しかも微分の直球問題ですから、思いつくのも、知っていれば難しくありません。しかし、この手法は、単にそれだけにとどまらない、本当に理解していれば、様々な問題の解決につながります。もちろんガイダンスでは、ここまでは話す時間はありません。でも、もし今後の勉強で、この問題がインパクトをもって記憶に残っていて、そして、何かの拍子でそれに気づけば、あのとき実は、ガイダンスである意味最も重要な問題の一つを選んでいたので、気づいてもらえれば、そう思って選んでいた問題でもあったのです。

だとしたら、僕がこの問題を単なるパフォーマンスではなく、そこにいる人へのプレゼントだ、と捉えていたことは、わかってもらえるのではないのでしょうか。

ではなぜあれだけに酷評されたのか。そのときのガイダンス自体は、全体として評価はよく、その意味で、解説の不備ではなかったとは思いますが。だとすると、最初から話は聞かれていないわけです。

おそらくですが、問題を解いて、たぶんすぐ解けたのでしょう。そして、最初に遠回りの解説をしている時点で、もう聞いていないと思われます。「その程度しか実力がない」と思われたのはそれが理由になります。しかしもっと言えば、「どうせその程度の講師だろう」と最初から思い込んでいるからこそ、見切りも早いのです。

まあ、でもそれは見誤りというものだよ、と。そう思わせるくらいの気概で続けていきたいと思っています。

実際には、さらに微小たわみなので  $(w')^2$  は無視します