

第 12 章

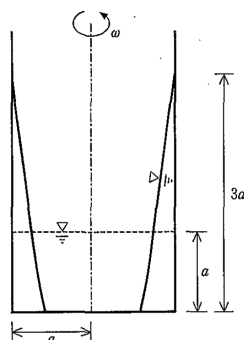
国家Ⅰ種 平成 16 年 No.68 水理学

12.1 問題：相対的静止

問題

内半径が a の円筒容器内に水が深さ a まで入っている。この円筒容器を円筒の中心軸を中心として角速度 ω で回転させ、 ω を徐々に大きくしていく。 $\omega = \omega_0$ で容器の底面の中心部が露出し、さらに角速度を上げると $\omega = \omega_1$ で内壁面での水深が $3a$ まで達した。このとき、 ω_1 はいくらか。

ただし、円筒容器と水は同じ角速度で回転するものとし、容器は十分深く、水はこぼれ出ないものとする。また、重力加速度を g とし、水の表面張力は無視する。



1. $\sqrt{\frac{3g}{a}}$ 2. $2\sqrt{\frac{g}{a}}$ 3. $\sqrt{\frac{6g}{a}}$ 4. $2\sqrt{\frac{2g}{a}}$ 5. $3\sqrt{\frac{g}{a}}$

12.2 再び相対的静止

相対的静止の問題です。相対的静止で、しかも回転の問題というのは、すでに第 1 章で扱いました。そのときも難問だったのですが、さらに実は出題ミスでした。その 3 年後の問題です。相変わらずの難問です。そもそも相対的静止は難問が出される傾向が強いと思います。

さて、第 1 章と同じ事をしても仕方ありません。そこで、その結果は借りてくることにしましょう。つまり、この問題では、中心の底の部分に xy 平面をとすると、

$$y = \frac{\omega^2}{2g}x^2 + C$$

となる、というのが結論でした。そして今は、 $x = a$ で $y = 3a$ を通ります。これを代入してみましょう。

$$3a = \frac{\omega_1^2}{2g} \times a^2 + C$$

$$\therefore C = 3a - \frac{a^2\omega_1^2}{2g}$$

このことから、この式が、

$$y = \frac{\omega_1^2(x^2 - a^2)}{2g} + 3a$$

と表されることがわかりました。が、肝心の角速度が出てきません。

ここまでは何とかあった人もいたと思いますが、おそらくここで手が止まったでしょうね。

12.3 実質的には数学

こんなとき、残された条件が何かを考えることが大切です。 ω_0 のときのことは関係ないでしょうから、問題は、最初の状態。そう、最初水深が $y = a$ にあったことが大切です。水の体積は πa^3 で変わらないのです。そこで体積を求めましょう。

しかしこれが結構面倒なのです。今回は $y = f(x)$ の形のグラフの下側の部分を y 軸回転したときの体積です。 y 軸回転の体積は、次の積分で与えられます。

$$V = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 dy$$

今回の場合、水があるのは $y = f(x)$ の右側の部分ですから、円筒の体積から引き算して求める必要があります。

つまり、

$$x^2 = \frac{2g}{\omega_1^2}(y - 3a) + a^2$$

となっていますから、

$$\begin{aligned} V &= 3\pi a^3 - \pi \int_0^{3a} \left(\frac{2g}{\omega_1^2}(y - 3a) + a^2 \right) dy \\ &= 3\pi a^3 + \frac{g}{\omega_1^2}(0 - 3a)^2 - \pi a^2 \times 3a \\ &= \frac{9ga^2}{\omega_1^2} \end{aligned}$$

案外簡単になりましたね、

$$V = \frac{9\pi a^2 g}{\omega_1^2} = \pi a^3$$

ですから、

$$\omega_1 = 3\sqrt{\frac{g}{a}}$$

となります。正解は肢5ですね。

久しぶりに解いてみたのですが、今解いてみると、そこまで難しくないような気がしてきました。ただ、この問題にはちょっとした思い出があります。今はないと思うのですが、当時、この国家I種試験の解説などをしていたある大学の先生のホームページがありました。そこで、「この問題が難しくて解けなかった」と正直に書かれていたのが、印象的だったのです。それは正直だなあ、と。実際、この問題は水理学と言うより数学ですからね。