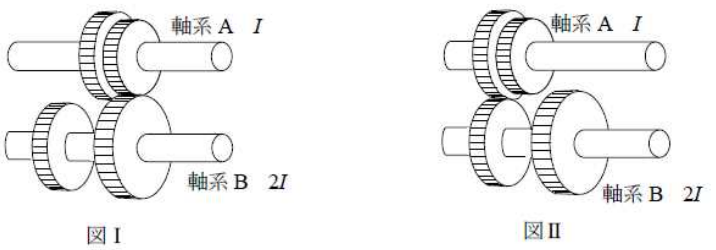
第 13 章

国家 I 種 平成 9 年 No.12 物理

13.1　問題：角運動量の保存

問題

　慣性モーメント I の軸系 A に，慣性モーメント $2I$ の軸系 B が変速歯車を介して接続され，図 I のように，変速比（軸系 A の回転数：軸系 B の回転数）2 : 1 で回転していた。これを図 II のように，変速比 1 : 1 に変速したとき，もとの運動エネルギーに対する失われた運動エネルギーの割合はいくらか。
ただし，外力は加わらないものとする。



1.　$\dfrac{1}{12}$　　2.　$\dfrac{1}{10}$　　3.　$\dfrac{1}{9}$　　4.　$\dfrac{1}{8}$　　5.　$\dfrac{1}{6}$

13.2　最悪の問題とは

難問というのは，難しすぎて試験問題としての意味がない，という点であまりよい出題ではないのですが，それでも，「これは難問だ」と見切りをつけるだけの実力があれば何ら問題はありません。これが悪問になると，解答者を無駄に混乱させたりする分だけたちが悪いと言えますが，この問題は，単なる悪問を超えて「最悪」の部類に入ると個人的には思っています。何が最悪なのでしょうか。見てみましょう。

13.3　一応の解答を

この問題は，典型的な角運動量保存則の問題に見えます。角運動量保存則は，回転運動において運動量保存則に対応する関係式です。慣性モーメントを I，角速度を ω としたときに，角運動量は $I\omega$ で表されます。

今，最初の B の角速度を ω_0，変速後の B の角速度を ω として問題を解いてみましょう。このとき，与えられた条件から，A の角速度は，変速前には $2\omega_0$，変速後には ω になります。これを使って角運動量保存則は次のようになります。

$$I \cdot 2\omega_0 + 2I\omega = I\omega + 2I\omega$$

$$\therefore \omega = \frac{4}{3}\omega_0$$

ここで，回転運動をしている場合の運動エネルギーは $\frac{1}{2}I\omega^2$ で計算できますので，最初に持っていた運動エネルギー E_0 は，

$$E_0 = \frac{1}{2}I(2\omega_0)^2 + \frac{1}{2}2I\omega_0^2 = 3I\omega_0^2$$

となり，失われたエネルギー ΔE は，

$$\Delta E = E_0 - \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}2I\omega^2 = \frac{1}{3}I\omega_0^2$$

となります。したがって，求める比率は，

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{1}{9}$$

となり，肢 3 を選ぶことができます。この肢 3 は正解です。

13.4　疑問

肢 3 は紛れもない正解です。だとしたら，何が問題なのでしょう。

この頃，問題，解答は今と違って非公開でした。それを再現していた大学がいくつかあり，さらに解答までつけているところもありました。僕は友人から 2 年分をもらって勉強していました。これは非常に助かりました。ただ，明らかに間違っている解答もありました。しかし，そのおかげで「専門試験は誰でも 8，9 割は取れる」というのは嘘だろう，ということにも気づきました。一方で，書かれている解答を全部信頼することなく，疑問があった場合には，調べて解答を作り直していました（ちなみに，間違いがあったとはいえ，7 割方正しかったのですから当時の難易度を考えると，十分精度の高い解答でした）。

そして，この解答ですが，当時の僕は剛体の力学についてあまり理解がなかったのですが，それでもこれはおかしいのでは，と思っていました。

角運動量保存則は，運動量保存則に対応するものだ，ということは知っていました。だとすると，運動量保存則と同じで回転方向に応じて正負を付けないのはおかしい。これがおかしいと思った理由でした。

この問題では，かみ合った歯車 A，B の回転方向はもちろん逆になります。しかし，それに気づいても問題は簡単ではありませんでした。そこで，正負をつけて（A の方向を正とする）同じように式を立てると次のようになります。

$$I \cdot 2\omega_0 - 2I\omega = I\omega - 2I\omega$$

$$\omega = 0$$

つまり，回転は止まってしまうのです。これでは選択肢に答えがありません。だからこれも間違っているに決まっています。そこでどうすべきか。

残念なことに，当時，まずはここで手が止まってしまいました。やはり，式の形だけを覚えて，式の導出や理解ができていないと，何か問題があったときに何も対処ができないのです。それどころか，間違っていること，問題があることにすら気づかないかもしれません。だから，試験テクニックは試験には大切ですが，それだけではだめなのです。

実は，このときには気づきませんでしたが，他にも最初の解答にはおかしいところがあります。慣性モーメントの回転軸です。軸系 A が I，軸系 B が $2I$ となっていますが，これはそれぞれどこを回転軸としているのか，といったら，当然「それぞれ」の軸でしょう。ということは，軸系 A の角運動量「$I \cdot 2\omega_0$」の回転軸は軸 A，軸系 B の角運動量「$2I\omega_0$」の回転軸は軸 B となります。異なる回転軸をもっているものを，1 つの式にそのまま入れていいのでしょうか。

答えは当然に「だめ」ということになります。つまり，1 つの式では，回転軸はそろっている必要があります。この理由も，突き詰めれば角運動量保存則がどのように証明されるのか，という点にかかってきます。これもふまえれば，最初の解答は全くだめということになります。

13.5　ではどのように解けばよいのか

元の問題を解く鍵は，運動量保存則にあります。最初の解答は，2 つの物体の衝突で使われる式，

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$$

をそのまま使ったことは明白です。だとしたら，これがどのように導かれるのかを考えてみるとよいでしょう。質量 m_1 の物体のみに注目して，衝突の時に受ける力積を $F_1\Delta t$ とすると，

$$m_1v_1 + F_1\Delta t = m_1v_1'$$

同じく質量 m_2 の物体が受ける力積を $F_2\Delta t$ とすると，

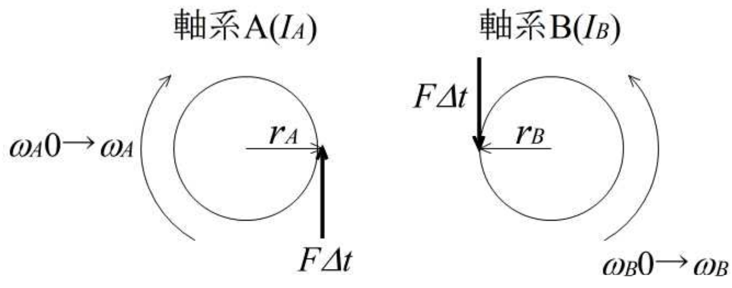
$$m_2v_2 + F_2\Delta t = m_2v_2'$$

というのが，元の運動量の式です。ここで，作用反作用の法則から，$F_1 + F_2 = 0$ ですから，2 つの式をたせば，

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$$

となります。これと同じことをしてみましょう。ここでは，仮に軸系 A の慣性モーメントを I_A，軸系 B の慣性モーメントを I_B とします。また，最初の角速度は，A の回転方向を正として，軸系 A を ω_{A0}，軸系 B を $-\omega_{B0}$ とします。同様に衝突後は，ω_A，$-\omega_B$ とします。また，変速後のかみ合う歯車の半径を，軸系 A について r_A，軸系 B について r_B とします。

この状況を下の図に表します。



作用反作用の法則を考慮して，力積を $F\Delta t$ としました。

このとき，軸系 A について，角運動量保存則をたてます。角運動量を変化させるのは，力ではなく，モーメントであることに気をつけましょう。軸系 A について，

$$I_A\omega_{A0} - F\Delta t \times r_A = I_A\omega_A$$

軸系 B について，

$$I_B\omega_{B0} + F\Delta t \times r_B = I_B\omega_B$$

もちろん今度は，この 2 つの式をたしても力積は消えません。半径が付いてくるからですね。そこで半径でそれぞれの式を割り算して，

$$\frac{I_A\omega_{A0}}{r_A} - F\Delta t = \frac{I_A\omega_A}{r_A}$$

$$\frac{I_B\omega_{B0}}{r_B} + F\Delta t = \frac{I_B\omega_B}{r_B}$$

としてから 2 つの式を加えれば，今度は力積が消えてくれますね。

$$\frac{I_A\omega_{A0}}{r_A} + \frac{I_B\omega_{B0}}{r_B} = \frac{I_A\omega_A}{r_A} + \frac{I_B\omega_B}{r_B}$$

となります。

歯車の場合，半径と角速度は反比例の関係にありますので，

$$r_A : r_B = \frac{1}{\omega_A} : \frac{1}{\omega_B} = \omega_B : \omega_A$$

となります。そこで，両辺に $r_A r_B$ をかけて ω_B を消去すれば，

$$I_A\omega_{A0}r_B + I_B\omega_{B0}r_A = \left(I_A r_B + I_B\frac{r_A^2}{r_B}\right)\omega_A$$

$$\therefore \omega_A = \frac{(I_A\omega_{A0}r_B + I_B\omega_{B0}r_A)r_B}{I_A r_B^2 + I_B r_A^2}$$

とようやく答えが出てきました。

ちなみに，最初に取り上げた解法で解くと，

$$\omega_A = \frac{(I_A\omega_{A0} + I_B\omega_{B0})r_B}{I_A r_B + I_B r_A}$$

となりますので，当然答えは一致しません。

13.6 悪問

しかし，この答えは複雑なので，本問の条件をとり込んでみましょう。まず，$I_A = I$，$I_B = 2A$，それに，$\omega_{A0} = 2\omega_0$，$\omega_{B0} = \omega_0$ でした。これを上で出した「正解」に代入してみます。

$$\omega_A = \frac{2I\omega_0 r_B^2 + 2I\omega_0 r_B r_A}{I r_B^2 + 2I r_A^2} = \frac{2(r_B + r_A)r_B}{r_B^2 + 2r_A^2}\omega_0$$

このままでは複雑ですが，変速後に $1:1$ になる，ということは $r_A = r_B$ ですので，これも代入すれば，

$$\omega_A = \omega_B = \frac{4}{3}\omega_0$$

となりますが･。これは，最初に出てきた解答と一致してしまいますね。

そう，やはり肢 3 は正解なのです。なぜ一致したのでしょうか。それもここまで来れば見抜くのは難しくないかもしれません。

結局，問題なのは，角運動量の式をただ加えても，力積が消えないことでした。でも，唯一 $r_A = r_B$ のときだけは，そのまま加えても，消えてしまうではないですか。つまり，

$$I_A\omega_{A0} - F\Delta t \times r_A = I_A\omega_A$$
$$I_B\omega_{B0} + F\Delta t \times r_B = I_B\omega_B$$

と並べてみればわかるとおり，$r_A = r_B$ のときだけは，そのまま加えても答えは変わらないのです。逆に言えば，この場合以外では，最初の解答では正解は出てこないことになります。この問題は，「間違った方法でも正解がたまたま出てしまう唯一のケース」を出題していたことになります。

そして，最初の解答と，後の「正解」を見てみてください。仮に，文字をうまくおいていたとしても，後の正解の方が，遙かに面倒で（半径を文字で置かないといけませんし），最初の誤答の方が，簡単に「正解」に辿りついてしまうのです。

つまり，「正しく考えると馬鹿を見る」問題だったといえます。これはある意味，正解の存在しない没問よりも「悪い」問題だと言えます。正解を努力して出した人が損をするのですからね。

13.7　解答の見つけ方

ちなみに，当時の僕は，最初からこう考えたわけではありません。どうも何かがおかしいと気づいた後どうしたのか，というと，これは手持ちの教科書を探しました。というのも，おそらくこの問題は有名問題で，どこかに正解があるだろうと思ったからです。実際，これはすぐに見つかりました。それをよく読んでみて，初めて角運動量保存則について多少なりとも理解できた気がしました。

僕は仕事柄，自分の専門領域以外の講義や解答を付けなければいけないときがあります。そのとき，常に気をつけていることは，「あくまで専門外なのだ」という意識をもって，とにかく慎重に調べることです。公務員試験の参考書，特に技術系の場合，執筆者も限られますので，自分の専門外のことを書く必要があるわけです。ところが，実際に見ると，素人の僕の目にも一目で「これは何も分かっていない」と見抜かれてしまうものが少なからずあります。

いや，公務員試験に合格しさえすればいいのですから，本当のプロと同じ視点は持てるわけがありませんので，「プロの視点で言えば違う」という指摘ならば，それは問題ないと思うのです。ただ，ちょっとネットで調べただけ，というのでは，最初から物の見方を見失ってて，しかもそれに気づいていないことになりかねません。

最近は公務員試験も正解番号が公表されていますから，正解を合わせることは易しいわけですが，この問題など，下手をすると，分かる人には「全く分かっていない」ことが見抜かれてしまうわけです。何が正しくて，何が違うのかをしっかり理解するためには，解答を付ける側としては，表面の正解番号をそろえるだけではなく，いくつもの文献に当たることが大切なのだと気をつけています。いや，それでも間違いは避けがたいのですが ...