

H.27 年【No. 9】

x に関する方程式

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x & x & 1 \\ -x & 1 & -1 & x \\ -x & 1 & 1 & -x \\ -1 & -x & x & 1 \end{pmatrix} = 16$$

を考える。この方程式の正の実数解となるのは次のうちどれか。

1. 1 2. $\sqrt{2}$ 3. 2 4. $2\sqrt{2}$ 5. 4

4 次の行列式なので計算が面倒ですが、きれいな形をしているため、正しく計算すれば、どのようにしても難しくありません。ここでは過去に使用された公式を利用して答えを出します。

解答

以下のようにブロック化した行列の行列式についての公式を使って答えを出す。

つまり、

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B|$$

特に、

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = |A||D|$$

与えられた行列式について、第3行から第2行を引き、第4行に第1行を加えると次のようになる。

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x & x & 1 \\ -x & 1 & -1 & x \\ 0 & 0 & 2 & -2x \\ 0 & 0 & 2x & 2 \end{pmatrix} = 16$$

ここで上の公式を使えば、

$$\begin{vmatrix} 1 & x \\ -x & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -2x \\ 2x & 2 \end{vmatrix} = 16$$

これを計算して、

$$4(1+x^2)^2 = 16 \quad \therefore x = 1$$