

H.27 年【No. 11】

2 次正方行列 A の固有多項式 $\det(tE - A)$ が $t^2 - 5t + 7$ であるとき、4 次正方行列 $\begin{pmatrix} O & A \\ A & O \end{pmatrix}$ の固有多項式として正しいのはどれか。

ただし、 E を単位行列、 O を零行列とする。

1. $(t^2 - 5t + 7)^2$ 2. $(t^2 + 5t + 7)^2$ 3. $(t^2 - 5t - 7)(t^2 - 5t + 7)$
4. $(t^2 - 5t + 7)(t^2 + 5t + 7)$ 5. $t^4 + 5t^2 + 49$

行列がブロック化されていますので、ブロック化の公式を使う方針になります。まずは左下を零行列にすることを狙っていきましょう。

解答

固有方程式は次の式で与えられる。

$$\begin{vmatrix} tE & -A \\ -A & tE \end{vmatrix} = 0$$

ここで、第 3 行に第 1 行をたし、第 4 行に第 2 行をたすと、次のようになる。

$$\begin{vmatrix} tE & -A \\ tE - A & tE - A \end{vmatrix} = 0$$

次に、第 1 列から第 3 列を引き、第 2 列から第 4 列を引くと次のようになる。

$$\begin{vmatrix} tE + A & -A \\ O & tE - A \end{vmatrix} = 0$$

ここで、ブロック化した行列の行列式に関する次の公式を考える。

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B|$$

特に、

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = |A||D|$$

これを使えば、問題の固有多項式は、

$$\det(tE + A) \det(tE - A) = -\det(-tE - A) \det(tE - A) = -(t^2 + 5t + 7)(t^2 - 5t + 7) = 0$$

となる。