

【No. 7】 3次実正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & -b & c \\ a & 0 & d \end{pmatrix}$$

は直交行列であるとする。このような A は何個あるか。

1. 1 個 2. 2 個 3. 4 個 4. 8 個 5. 16 個

直交行列の定義を知っているかどうかを尋ねる問題ですね。定義さえ知っていれば場合分けをすることで簡単に解くことができるように思われます。こんな問題も出題されるのですね。

解答

行列が直交行列であるとは、3つの列ベクトルが正規直交系をなすことをいう。

まず第1列について、大きさが1でなければいけないので、

$$\sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = 1 \quad \therefore a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

次に、第1列と第2列の内積は常に0になっている。そこで第2列の大きさが1にならなければいけないので、

$$\sqrt{b^2 + (-b)^2} = 1 \quad \therefore b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

次に、第2列と第3列の内積は常に0である。第1列と第3列の内積について、

$$ac + ac + ad = a(2c + d) = 0 \quad \therefore 2c + d = 0$$

最後に第3列の大きさが1なので、

$$\sqrt{c^2 + c^2 + d^2} = \sqrt{2c^2 + (-2c)^2} = \sqrt{6c^2} = 1$$

$$\therefore c = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$$

以上の正負はどの組み合わせでも条件を満たすので、考えられる個数は $2^3=8$ 個したがって、正解は肢4である。