

【No. 9】 行列式

$$\det \begin{pmatrix} a & -b & -b & -b \\ -b & a & -b & -b \\ -b & -b & a & -b \\ -b & -b & -b & a \end{pmatrix}$$

と等しいのは次のうちではどれか。

1. $(a-3b)(a+b)^3$ 2. $(a-3b)(a-2b)(a-b)(a+b)$ 3. $(a-b)^2(a+b)^2$
 4. $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$ 5. $(a^2+b^2)^2$

典型的な行列式の計算問題で、難しくないように思われます。各列（行）の和が一定のパターンですので、まずは全ての行の和をつくってくくり出すと簡単でしょう。解答では、極力基本変形をしていきますが、実戦的には、ある程度のところで、余因子行列展開をしてよいでしょう。

解答

次のように、基本変形をしていく。

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \begin{vmatrix} a-3b & a-3b & a-3b & a-3b \\ -b & a & -b & -b \\ -b & -b & a & -b \\ -b & -b & -b & a \end{vmatrix} \\ &= (a-3b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -b & a & -b & -b \\ -b & -b & a & -b \\ -b & -b & -b & a \end{vmatrix} \\ &= (a-3b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a+b & 0 & 0 \\ -b & -b & a & -b \\ -b & -b & -b & a \end{vmatrix} \\ &= (a-3b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a+b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+b \end{vmatrix} \\ &= (a-3b)(a+b)^3 \end{aligned}$$

第2行、3行、4行を第1行に加えています

第1行の共通因数をくり出しました

第1行のb倍を第2行に加えました

上と同じことを第3、4行にも行いました

最後は、覚えていてもいいですし、第1列について展開してもいいでしょう