【No.　10】 実数 x，y，z が条件 $x^2+y^2+z^2=1$ を満たしながら変化するとき，関数

$$f(x)=x^2+y^2+2z^2+2yz+2zx$$

の最大値と最小値の組み合わせとして正しいのはどれか。

	最大値	最小値		最大値	最小値		最大値	最小値
1．	1	0	2．	2	0	3．	2	1
4．	3	0	5．	3	1			

条件付きの最適化の問題ですから，ラグランジュの未定乗数法がすぐに頭に浮かびます。ただ，場合分けが多く，簡単にはいきません。条件が特殊なので，その特殊性を活かして変数変換をした方が易しく解けるようです。

解答

変数を次のように変換する。

$$\begin{cases} x=\sin\theta\cos\phi \\ y=\sin\theta\sin\phi \\ z=\cos\theta \end{cases}$$

極座標とするなら，範囲が限定されますが，ここでは全範囲としてよいでしょう

これを代入すると，次のようになる。

$$\begin{aligned} f(\theta,\phi) &= 1+\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta\sin\phi+2\cos\theta\sin\theta\cos\phi \\ &= 1+\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta(\sin\phi+\cos\phi) \\ &= 1+\cos^2\theta+2\sqrt{2}\cos\theta\sin\theta\sin(\phi+\frac{\pi}{4}) \\ &= \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\sqrt{2}\sin 2\theta\sin(\phi+\frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

2 行目から 3 行目は合成公式，3 行目から 4 行目は半角公式です。

ここで，三角関数の合成公式を使うと，

$$f=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{1+8\sin^2(\phi+\frac{\pi}{4})}}{2}\sin(2\theta+\theta_0)$$

$B\cos 2\theta+C\sin 2\theta$　の形で関数を見ています。

したがって，これが最大の時には，2 カ所の sin がともに 1 となるときで，このとき，最大値は 3。一方，最小の時には，$\sin^2(\phi+\frac{\pi}{4})=1$ で，$\sin(2\theta+\theta_0)=-1$ となるので，最小値は 0 となる。したがって，正解は肢 4 である。

別解

ラグランジュの未定乗数法を使う。簡単のために，条件式を使って，

$$g(x,y,z)=1+z^2+2zx+2yz+k(x^2+y^2+z^2-1)$$

を考える。

方針としては自然ですが，場合分けが多いのが難点です

$$\frac{\partial g}{\partial x}=2z+2kx=0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=2z+2ky=0$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}=2(z+x+y)+2kz=0$$

第 1 式と第 2 式より，$k(x-y)=0$ となるので，$k=0$ か $x=y$ となる。

① $k=0$ のとき

第 1，2 式より，$z=0$ となる。第 3 式より，

$x+y=0$

これを条件式に代入して，

$$2x^2=1 \qquad \therefore x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

これより， $(x,y)=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ となる。このとき，$f=g=1$

② $x=y$ のとき

第 1 式より，$z=-kx$

これを第 3 式に代入すると，

$-kx+2x-k^2x=-x(k+2)(k-1)=0 \qquad \therefore x=0$ or $k=1,-2$

②-（i） $x=0$ のとき，

$y=0$ であり，条件より，$z=\pm 1$ となる。このとき，$f=g=2$

② -(ii) $k=1$ のとき，

$z=-x$ なので，条件より $(x,y,z)=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ となる。これを代入して，$f=g=0$ となる。

② -(iii) $k=-2$ のとき，

$z=2x$ なので，条件に代入して， $(x,y,z)=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}},\pm\frac{1}{\sqrt{6}},\pm\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ となる。これを代入して，$f=g=3$ となる。