

【No. 11】 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

の固有値を α , β , γ とするとき $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ の値はいくらか。

1. -12 2. 2. -9 3. -6 4. -3 5. 0

まず固有方程式を求めることから始まります。求める式が対称式ですから、直接解を求めるよりも、次数下げや基本対称式の利用を考えることになるでしょうが、この問題では、その両方をうまく使うことで解けるように問題ができていますね。

解答

固有方程式を求めると、

$$\begin{vmatrix} t-1 & -3 & -1 \\ 0 & t-2 & -4 \\ -1 & -2 & t+3 \end{vmatrix} = (t-1) \begin{vmatrix} t-2 & -4 \\ -2 & t+3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ t-2 & -4 \end{vmatrix} \\ = (t-1)(t-2)(t+3) - 8(t-1) - 12 - (t-2) \\ = t^3 - 16t + 4 = 0$$

したがって、この解の1つについて、

$$\alpha^3 = 16\alpha - 4$$

したがって、

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 16(\alpha + \beta + \gamma) - 4 \times 3$$

ここで、3次方程式の解と係数の関係を固有方程式に使うと、

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

これより、

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -12$$

したがって、正解は肢1である。

第1列について、余因子行列展開をしました。