

【No. 12】 整数級 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^n} x^{2n+1}$ の収束半径はいくらか。

1. $\frac{1}{\sqrt{e}}$ 2. $\frac{\sqrt{e}}{2}$ 3. $\sqrt{e}$ 4. $\frac{e}{2}$ 5. e

収束半径の問題ですから、まずはダランベールの公式を考えるのでしょう。そのときに、選択肢に e があることを十分意識しておきます。ただ、このままでは偶数巾の項の係数が 0 で、そのままではダランベールの公式は使えませんので、一工夫をしておきます。有名問題ですね。

解答

$x^{2n}=y$ とおき、さらに余った x は係数として収束半径を考える。つまり、求める整数級を

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \cdot n!}{(n+1)^n} y^n$$

として考える。このとき係数は $a_n = \frac{x \cdot n!}{(n+1)^n}$ となる。ダランベールの公式より、

収束半径 r は、

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)^n} \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= e \end{aligned}$$

したがって、 $y = x^2 = e$ が収束半径なので、求める収束半径は、 $x = \sqrt{e}$ となる。よって、正解は肢 3 である。