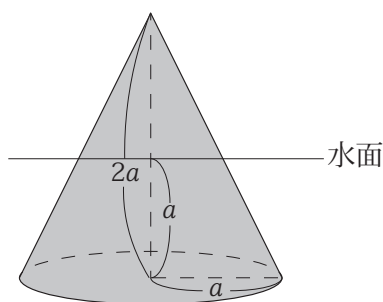


【No. 16】 図のように、底面の円の半径が a 、高さ $2a$ の円錐状の物体を、底面が水平になるように水に浮かべたところ、 a だけ沈んで静止した。この状態から物体をわずかに水中に押し下げ、静かに放したところ、物体は底面が水平な状態を保ったまま鉛直方向に単振動を始めた。このとき、単振動の周期として最も妥当なのはどれか。

ただし、重力加速度の大きさを g とする。また振幅は a よりも十分小さく、摩擦、表面張力及び水面の揺れは無視できるものとする。



1. $2\pi\sqrt{\frac{2a}{3g}}$ 2. $4\pi\sqrt{\frac{2a}{3g}}$ 3. $\pi\sqrt{\frac{7a}{3g}}$ 4. $\pi\sqrt{\frac{14a}{3g}}$ 5. $2\pi\sqrt{\frac{7a}{3g}}$

単振動の周期なので、運動方程式をたてにいきます。体積を正しく立てないと公式を使うことができないため、1つ1つ立式していきましょう。

解答

釣り合い位置を $x = 0$ として、下向きに x 軸をとる。このとき浮いている高さが $a - x$ となり、断面の半径 r は $r = \frac{a - x}{2}$ となるので、水に沈んでいる部分の体積 $V(x)$ は、全体の体積から浮いている部分の体積を引いて、

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi a^2 \times 2a - \frac{1}{3}\pi r^2(a - x) = \frac{\pi}{3} \left\{ 2a^3 - \frac{(a - x)^3}{4} \right\}$$

したがって、

$$V(x) \doteq V(0) + \frac{\pi}{4}a^2x$$

ただし、 x^2 以上の微小量は無視した。 $x = 0$ のときに働く浮力と、物体の重力が釣り合うため、物体の質量は、水の密度を ρ とすると、物体の質量は $\rho V(0)$ となる。したがって、運動方程式より、

$$\rho V(0)\ddot{x} = \frac{7}{12}\pi\rho a^3\ddot{x} = -\rho\frac{\pi}{4}a^2xg \quad \therefore \ddot{x} = -\frac{3g}{7a}x$$

これより、単振動の公式から角振動数 ω が $\omega = \sqrt{\frac{3g}{7a}}$ となる。したがって、求める周期 T は、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{7a}{3g}}$$