

【No. 17】 図Iのように、長さ $6L$ の伸び縮みしない様な細いひもが斜度 θ ($\sin \theta = 0.6$) の斜面上に長さ $4L$ 、水平面上に長さ $2L$ 接している状態で固定されている。いま、ひもを静かに放したところ、ひもは斜面の最大斜度の方向に沿って下り始めた。図IIのように、ひもの最後尾が斜面に載った直後の状態におけるひもの速さとして最も妥当なのはどれか。

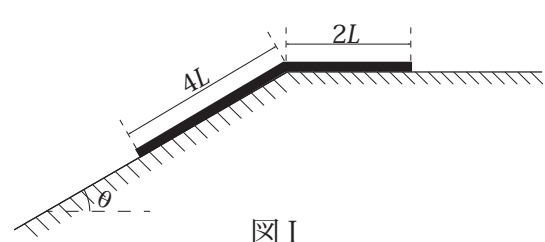


図 I

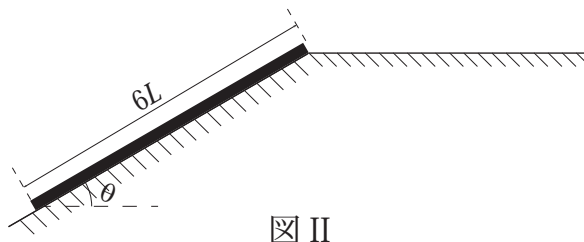


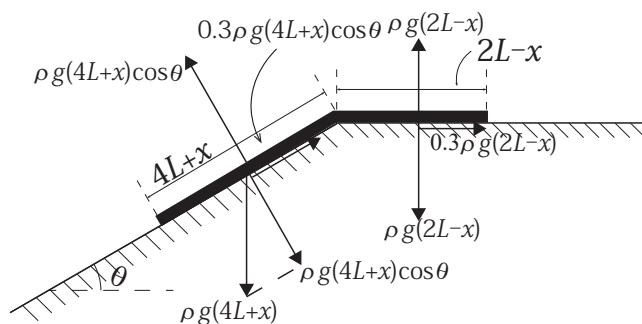
図 II

1. $\sqrt{\frac{gL}{3}}$ 2. $\sqrt{\frac{gL}{2}}$ 3. $\sqrt{gL}$ 4. $\sqrt{2gL}$ 5. $\sqrt{3gL}$

非常に難しい問題です。摩擦がないならともかく、摩擦のある状況では、運動方程式を解くのは相当困難です。そこでエネルギー保存(そもそも時間を求める必要がないため、まずエネルギー保存を考えるべきでしょうが) となりますが、今度は仕事計算が必要となります。

解答

力学的エネルギーの変化を考える。摩擦力が働いているため、摩擦が行った仕事の分だけ、力学的エネルギーは保存する。そこで、斜面上に載っているひもの長さを $4L + x$ とおいて摩擦力 F を求める。



単位長さ当たりのひもの質量を ρ とする。

$\sin \theta = 0.6$ より $\cos \theta = 0.8$ であることに気をつけると、斜面の部分の摩擦力 F_1 は、 $F_1 = 0.3\rho g(4L + x) \cos \theta = 0.24\rho g(4L + x)$ となり、平面の部分の摩擦力 F_2 は、 $F_2 = 0.3\rho g(2L - x)$ となる。

ここで、ひもの速さを v とすると、摩擦力の行う仕事率は $(F_1 + F_2)v$ となり、単位時間当たりこの分だけエネルギーは失われる。したがって、ひもが図Iから図IIの状態になるまでに失うエネルギーは、

$$\begin{aligned}
\int (F_1 + F_2) v dt &= \int_0^2 (F_1 + F_2) dx \\
&= \rho g \int_0^2 (1.56L - 0.06x) dx \\
&= (3.12L - 0.12L) \rho g = 3\rho g L
\end{aligned}$$

平面の高さを基準とすると、重心位置で考えて、ひもの位置エネルギーは、

$$4\rho L \times (-2L \sin \theta) - 6\rho L \times (-3L \sin \theta) = 6\rho g L$$

だけ減少するので、求める速度を u とおくと、エネルギーの変化について、

$$6\rho g L - 3\rho g L = \frac{1}{2} \times 6\rho L u^2$$

$$\therefore u = \sqrt{gL}$$