

【No. 32】 3次元ユークリッド空間において,

$$(x, y, z) = \left(\sin t \cos \theta, \sin t \sin \theta, \log_e \tan \frac{t}{2} + \cos t \right)$$

で与えられる曲面の第一基本形式を $E dt dt + 2F dt d\theta + G d\theta d\theta$ とするとき $EG - F^2$ に等しいのは次のうちではどれか。

1. 1 2. $\sin^2 t$ 3. $\cos^2 t$ 4. $\frac{1}{\sin^2 t}$ 5. $\frac{1}{\tan^2 t}$

解答

$$f = \left(\sin t \cos \theta, \sin t \sin \theta, \log_e \tan \frac{t}{2} + \cos t \right)$$

とおく。ここで,

$$\begin{aligned} f_t &= \left(\cos t \cos \theta, \cos t \sin \theta, \frac{1}{\tan \frac{t}{2}} \frac{1}{2 \cos^2 \frac{t}{2}} - \sin t \right) \\ &= \left(\cos t \cos \theta, \cos t \sin \theta, \frac{1}{\sin t} - \sin t \right) \end{aligned}$$

であり,

$$f_\theta = (-\sin t \sin \theta, \sin t \cos \theta, 0)$$

となる。いま,

$$E = f_t \cdot f_t = \cos^2 t + \frac{1}{\sin^2 t} - 2 + \sin^2 t = \frac{1}{\sin^2 t} - 1$$

$$F = f_t \cdot f_\theta = 0$$

$$G = f_\theta \cdot f_\theta = \sin^2 t$$

したがって,

$$EG - F^2 = 1 - \sin^2 t = \cos^2 t$$