【No. 36】 3重積分

$$\iiint_D (\max\{x, y, z\} + \min\{x, y, z\}) dx dy dz, D = \{(x, y, z) \in R^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

の値はいくらか。

1. $\frac{1}{6}$ 2. $\frac{1}{3}$ 3. 1 4. 3 5. 6

解答

x, y, z の大小の順番は6通りあり、それぞれ対称的なので、ここでは $x \leq y \leq z$ として最後に6倍する。このとき $\min\{x, y, z\} = x$ であるので、

$$\iiint_D \min\{x, y, z\} dx dy dz = \int_0^1 \left\{ \int_0^z \left(\int_0^y x dx \right) dy \right\} dz = \frac{1}{24}$$

となる。一方、 $\max\{x, y, z\} = z$ となるので、

$$\iiint_D \max\{x, y, z\} dx dy dz = \int_0^1 \left\{ \int_x^1 \left(\int_y^1 z dz \right) dy \right\} dx = \frac{1}{8}$$

したがって、求める値は、 $6 \times \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{24} \right) = 1$