

【No. 37】 次の記述の㉗, ㉘, ㉙に当てはまるものの組合わせとして正しいのは次のうちではどれか。

・複素関数 $f(z) = \frac{\sin z}{e^z - 1}$ において, $z = 0$ は f の ㉗ である。

・複素関数 $f(z) = e^{\frac{z+1}{z-1}}$ において, $z = 1$ は f の ㉘ である。

・複素関数 $f(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}$ において, $z = 0$ は f の ㉙ である。

- | | ㉗ | ㉘ |
|-------------|-------|----------|
| 1. 除去可能な特異点 | 極 | 除去可能な特異点 |
| 2. 除去可能な特異点 | 真性特異点 | 極 |
| 3. 除去可能な特異点 | 真性特異点 | 除去可能な特異点 |
| 4. 極 | 極 | 極 |
| 5. 極 | 真性特異点 | 極 |

解答

㉗について,

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots$$

$$e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots$$

したがって,

$$f(z) = \frac{z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots}{z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots} = \frac{1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} - \cdots}{1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \cdots}$$

となるので, $f(0) = 1$ とすれば特異点は除去できる。したがって, 「除去できる特異点」である。

㉘について,

$$\frac{z+1}{z-1} = 1 + \frac{2}{z-1}$$

なので,

$$f(z) = e \cdot e^{\frac{2}{z-1}} = e \left(1 + \left(\frac{2}{z-1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{z-1} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{2}{z-1} \right)^3 + \cdots \right)$$

となる。したがって, $z = 1$ は f の真性特異点である。

㉙について,

$$f(z) = \frac{z - \sin z}{z \sin z}$$

$e^{\frac{1}{z}}$ の $z = 0$ が真性特異点であることは有名です。これを知っていれば簡単かもしれません。

ここで⑦で使った級数を代入すると、

$$f(z) = \frac{\frac{z^3}{6} - \frac{z^5}{120} + \cdots}{z^2 - \frac{z^4}{6} + \frac{z^6}{120} + \cdots} = \frac{\frac{z}{6} - \frac{z^3}{120} + \cdots}{1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} + \cdots}$$

となるので、 $f(0) = 0$ とすれば特異点は除去できる。したがって、 $z = 0$ は f の「除去できる特異点」である。