

【No. 39】 R^2 上の関数 $u(x,y) = x^2 - y^2$ と R^2 上の実数値 C^2 級関数 $v(x,y)$ が、偏微分方程式系

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{cases} ((x,y) \in R^2)$$

と条件 $v(0,0)=5$ を満たしているとする。 $v(2,3)$ の値はいくらか。

1. 2 2. 7 3. 12 4. 17 5. 22

解答

与えられた偏微分方程式は、コーシー・リーマンの関係式である。

そこで、 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ となる (z) を考えると。容易に、

$$f(z) = z^2 + C = x^2 - y^2 + 2ixy + C \quad (C \text{ は定数})$$

が見つかる。したがって、

$$v(x,y) = 2xy + 5$$

とすれば、題意の条件を満たす。このとき、 $v(2,3)=17$