

【No. 40】 齊次線形常微分方程式

$$\frac{d^3 u}{dx^3} - 5 \frac{d^2 u}{dx^2} + 3 \frac{du}{dx} + 9u = 0$$

の解空間の基底の組として正しいのは次のうちではどれか。

1. $1, e^{3x}$
2. e^{-x}, e^{3x}
3. $e^{-x}\cos x, e^{-x}\sin x, e^{3x}$
4. $e^{-x}, e^{3x}\cos x, e^{3x}\sin x$
5. e^{-x}, e^{3x}, xe^{3x}

解答

解を e^{kx} をおいて代入して整理すると,

$$k^3 - 5k^2 + 3k + 9 = (k+1)(k-3)^2 = 0$$

したがって, $k=3$ が重解であることに注意して, 解空間の基底は,

$$u = e^{-x}, e^{3x}, xe^{3x}$$

となる。