【No.　42】 xy 平面上の閉集合 $D=\{(x,y)\in R^2 | 0 \leqq x \leqq 2, 0 \leqq y, y^2 \leqq 8x\}$ の境界を正の向き（反時計回り）に一周する曲線を C とする。このとき，C に沿った線積分

$$\int_C \left\{\left(\frac{xy}{2}-x^3\right)dx+\left(x^2y-x\right)dy\right\}$$

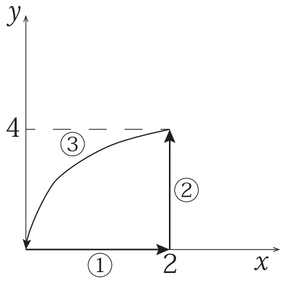
の値はいくらか。

1．$\frac{64}{5}$　2．$\frac{67}{5}$　3．$\frac{96-20\sqrt{2}}{3}$　4．$\frac{2560-256\sqrt{2}}{15}$　5．$\frac{688}{3}$

線積分の計算問題ですが，積分路が周回路ですので，完全微分になっているところは積分が 0 となります。これを狙って項を減らしたかったのですが，あまり見つかりませんでした。解答では 1 つだけ項を減らしています。もしかしたらもっと減らせるかもしれませんが，本試験では，時間との兼ね合いですぐに思いつく範囲にとどめ，あとは計算した方が速いのではないでしょうか。

解答

C を図示すると，次のようになる。これは周回路になるため，完全微分となっているところの積分は 0 になる。与えられた積分の中では，



$$x^3dx=\frac{1}{4}d(x^4)$$

であるので，ここは周回路にそって積分すると 0 である。他の部分は，①，②，③それぞれの部分に分けて積分する。つまり，

$$\int_C \left\{\frac{xy}{2}dx+\left(x^2y-x\right)dy\right\}$$

①について，

このとき y=0，dy=0 なので 0 となる。

②について，

このとき，x=2，dx=0 なので，

$$\int_0^4 (4y-2)dy=24$$

③について，

与えられた曲線の式を微分して，$2y\,dy=8dx$ となる。これと $x=\frac{y^2}{8}$ をつかって，

x を消去すると，

$$\int_4^0 \left(\frac{y^4}{64}+\frac{y^5}{64}-\frac{y^2}{8}\right)dy=-\frac{16}{5}-8$$

以上から，求める積分値は，

$$24-\frac{16}{5}-8=\frac{64}{5}$$