【No.　56】 5 変数の関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_5)$ の 7 階以下の偏導関数で異なるものは最大でいくつか。

ただし，関数 f は任意回偏微分可能であるものとし，f 自身も偏導関数に含めるものとする。例えば，2 変数関数 $f(x, y)$ の 2 階以下の偏導関数は，$f, \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ の 6 個である。

1．330 個　　2．462 個　　3．495 個　　4．792 個　　5．924 個

解答

n 階の導関数の個数を求める。偏微分の順番が変わっても同じ関数になるため，各変数で偏微分した回数だけが問題である。つまり，

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = n$$

の 0 以上の解の個数を求めればよいが，これは n 個の物と 4 個の仕切りの合計 $n+4$ 個の物を並べる並べ方に等しい。このとき，仕切りによって 5 つの部分に分かれるが，それぞれの部分に含まれる物の個数を x の値とすればよいからである。そしてこの値は $n+4$ 個の場所から仕切り 4 個を入れる場所を選ぶ選び方に等しいので，${}_{n+4}\mathrm{C}_4$ になる。よって，求める個数は，

${}_4\mathrm{C}_4 + {}_5\mathrm{C}_4 + {}_6\mathrm{C}_4 + {}_7\mathrm{C}_4 + {}_8\mathrm{C}_4 + {}_9\mathrm{C}_4 + {}_{10}\mathrm{C}_4 + {}_{11}\mathrm{C}_4 = 1 + 5 + 15 + 35 + 70 + 126 + 210 + 330 = 792$