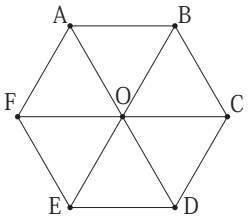
【No. 60】 図のようなグラフにおいて，頂点に存在する粒子が，1 秒ごとの離散時刻，隣接する頂点に等確率で移動するランダム・ウォークを考える。粒子が頂点 O に存在する定常確率はいくらか。

ただし，粒子はグラフ上に 1 つだけ存在するものとする。



1． $\frac{1}{3}$　　2． $\frac{1}{4}$　　3． $\frac{1}{5}$　　4． $\frac{1}{6}$　　5． $\frac{1}{7}$

まず対称性に気付くことでしょう。A~F をまとめてしまえば，非常に簡単になります。なお，A~E にいる場合，次に O に移る確率と，外周にとどまる確率は 1：2 ですが，O に移れば，その次は選択の余地無く，外周に戻ります。そこで，選択 3 回に 1 回，「2 秒かけて外周に戻る」と考えると，「1 秒後外周」「1 秒後外周」「2 秒後外周に戻る」の 3 つが公平に起こると考えられます。こうすると，4 秒に 1 度ずつ O に戻ることが直感的にも理解できます。

解答

n 秒後に O にいる確率を a_n，O 以外にいる確率を b_n とする。このどちらか以外なので，常に $a_n + b_n = 1$ が成立する。O にいれば 1 秒後には必ず O 以外にいて，O 以外にいれば，どこにいても 1 秒後には確率 $\frac{1}{3}$ で O にいる。したがって，漸化式として，次の式が成立する。

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3} b_n \\ b_{n+1} = a_n + \frac{2}{3} b_n \end{cases}$$

上の式に $b_n = 1 - a_n$ を代入すると，

$$a_{n+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} a_n$$

となる。ここで定常確率，つまり収束したときには $a_{n+1} = a_n = a$ とおけるので，

$$a = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} a \qquad \therefore a = \frac{1}{4}$$