

2016 年 ちょっとした問題を 第 1 回

【No. 1】 10 年間無故障で稼働する確率が $\frac{1}{2}$ の新品の農業機械を 4 台購入することを考える。購入した 4 台の農業機械のうち、2 台のみが 10 年間無故障で稼働する確率はいくらか。

【No. 2】 $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ に対して、行列 A を、

$$A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}$$

とすると、 $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ を求めよ。

1 問目は易しめ～標準の問題を用意しました。独立試行の確率ですね。2 問目はやや難しめの問題を。固有値問題になりますね。

解答

【No. 1】 4 台のうち、ある特定の 2 台が無故障で、2 台が故障中となる確率は、
 $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ となる。4 台の中で、どの 2 台が無故障かは ${}_4C_2 = 6$ 通りあるので、
求める確率は、

$$6 \times \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$$

【No. 2】 固有値を求める。固有方程式は、

$$k^2 - (p+q)k + pq - (1-q)(1-p) = (k-1)(k+1-p-q) = 0$$

$$\therefore k = 1, p+q-1$$

ここで、 $k = 1$ に対する固有ベクトルは、

$$\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$$

$$\therefore p + (1-p)y = 1$$

これを解くと $y = 1$ となるので、

$$\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

もう 1 つの固有値についても同様に、

$$\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} = (p+q-1) \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$$

平成 28 年度国家一般職農業土木職の確率の問題です。

平成 14 年度国家 I 種理工 II 区分の問題です。固有値を利用した典型問題です。

これより、 $p + (1-p)y = p + q - 1$ となるので $y = -\frac{1-q}{1-p}$ となる。固有ベク

トルは大きさが問われないので、

$$\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(1-p) \\ 1-q \end{pmatrix} = (p+q-1) \begin{pmatrix} -(1-p) \\ 1-q \end{pmatrix}$$

次に A^n を考える。

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より、

$$A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

同様に、もう 1 つの固有値についても、

$$A \begin{pmatrix} -(1-p) \\ 1-q \end{pmatrix} = (p+q-1) \begin{pmatrix} -(1-p) \\ 1-q \end{pmatrix}$$

これをまとめると、

$$A^n \begin{pmatrix} 1 & -(1-p) \\ 1 & 1-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -(p+q-1)^n(1-p) \\ 1 & (1-q)(p+q-1)^n \end{pmatrix}$$

したがって、 $-1 < p+q-1 < 1$ より、

$$A^\infty \begin{pmatrix} 1 & -(1-p) \\ 1 & 1-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ここで、

$$\begin{pmatrix} 1 & -(1-p) \\ 1 & 1-q \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2-p-q} \begin{pmatrix} 1-q & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって、

$$A^\infty = \frac{1}{2-p-q} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-q & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2-p-q} \begin{pmatrix} 1-q & 1-p \\ 1-q & 1-p \end{pmatrix}$$

【No. 2】では、固有値 1 が出てきました。実は、この行列は「確率遷移行列」と呼ばれるもので、固有値 1 をとることが知られています。たとえば、A と B の 2 つの箱があり、その中に物質が一定量入っているとします。A に入っているものの割合 $1-p$ を B に、B に入っているものの割合 $1-q$ を A に同時に移すとし、 n 回移し替えた後の A、B の量をそれぞれ a_n 、 b_n とすると、この A を使うと、

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = (a_n, b_n)A$$

となります。これがこの問題の行列です。