

H.29 年【No. 1】

行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

とする。 $A^5 - A^2 - 16A$ と等しいのはどれか。

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{pmatrix}$

先頭の問題で必須問題です。何か考えるよりは計算した方が速い、というのが解法 1 です。選択肢を先に見ておけば、かけ算 2 回 + α で正解が分かります。それに対して、と何かあるだろうと考えたのが解法 2 で、こちらは正解の理由がわかりますが、計算量はどちらもどっちですね。

解答

解法 1 根性で計算する

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \times A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 5 \\ -4 & -5 & 9 \\ -5 & -18 & 27 \end{pmatrix}$$

最後に、 A^5 については、

$$A^5 = A^4 \times A = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 5 \\ -4 & -5 & 9 \\ -5 & -18 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

の左上成分だけを計算すると -25 になる。したがって、 $A^5 - A^2 - 16A$ の左上成分は、 $-25 - 3 + 32 = 4$ となる。これより、正解が肢 2 であるとわかる。

解法 2 ケーリー・ハミルトンの定理を使う

まず、与えられた行列の固有方程式を求める。

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ -1 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(-1-\lambda)(3-\lambda) + 2(-2-\lambda) + (-1-\lambda) \\ = -\lambda^3 + 4\lambda + 1 = 0$$

ケーリー・ハミルトンの定理より,

$$-A^3 + 4A + E = 0$$

これを使って次数下げをする。

$$A^5 = 4A^3 + A^2 = 4(4A + E) + A^2 = A^2 + 16A + 4E$$

したがって,

$$A^5 - A^2 - 16A = 4E$$

固有方程式に行列を代入しても成立する, というのがケーリー・ハミルトンの定理です。